Lösungen zu Grundwissensaufgaben 11. Jahrgangstufe – Teil 1

1. Eigenschaften gebrochen-rationaler Funktionen

Umformungen	D_f	NS	GW
$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x+2} = \frac{(x-1)(x+2)+2}{x+2} = \frac{x^2+x}{x+2} = \frac{x(x+1)}{x+2}$	$R\backslash\{-2\}$	$x_1 = 0 \mid x_2 = -1$	∞
$f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-4} = \frac{2x(x-2)}{(x+2)(x-2)}$	$R\backslash\{-2 \mid 2\}$	$x_1 = 0 \mid x_2 = 2$	2
$f(x) = x - \frac{x^2-1}{x+2} = \frac{x(x+2)-(x^2-1)}{x+2} = \frac{2x+1}{x+2}$	$R\backslash\{-2\}$	$x_1 = -0{,}5$	2

2. Funktionsterme gebrochen-rationaler Funktionen finden

Gib einen (möglichst einfachen) Funktionsterm an, so dass der Graph G_f der Funktion die folgenden Eigenschaften aufweist.

a) Doppelte NS bei $x = 2$, Polstelle mit VZW bei $x = 3$ sowie $f(0) = 1$: $f(x) = \frac{3\cdot(x-2)^2}{4\cdot(3-x)}$

b) Keine NS, Polstelle ohne VZW bei $x = -1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$: $f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$

c) Asymptoten von G_f sind: $x = 2 \mid x = 3 \mid y = 0$, keine NS: $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$

d) Die einzige Definitionslücke bei $x = -2$ ist hebbar: $f(x) = \frac{(x+2)}{(x+2)}$

3. Grenzwert berechnen

Zu zeigen: $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} \frac{x^3-2x^2}{2x^2-8} = \frac{1}{4}$

Faktorisieren: $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} \frac{x^3-2x^2}{2x^2-8} = \lim\limits_{x\to 2\pm 0} \frac{x^2(x-2)}{2(x+2)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2\pm 0} \frac{x^2}{2(x+2)} = \frac{4}{2\cdot 4} = \frac{1}{2}$

h-Methode: $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(2+h) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-2(2+h)^2}{2(2+h)^2-8} =$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{8+12h+6h^2+h^3-(8+8h+2h^2)}{8+8h+2h^2-8} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^3+4h^2+4h}{2h^2+8h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h(h^2+4h+4)}{2h(h+4)} =$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{(h^2+4h+4)}{2(h+4)} = \frac{4}{2\cdot 4} = \frac{1}{2}$

4. Asymptoten

$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+8x} = \frac{(x+2)(x-2)}{x(x+8)}$: Senkrecht: $x = -8$ und $x = 0$

Waagrecht: $y = 1$

$g(x) = \frac{x^2-1}{x^3+8x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x^2+8)}$: Senkrecht: $x = 0$

Waagrecht: $y = 0$

5. Sekante und Tangentensteigung

Gegeben: $f(x) = 2x^2 - x + 1$.

a) $f(1) = 2$ und $f(2) = 7$

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{7-2}{2-1} = \frac{5}{1} = 5$

b) Punkt $P(1|2)$ in $y = 5x + t$ einsetzen: $2 = 5\cdot 1 + t$ → $t = -3$

Sekante: $s(x) = 5x - 3$

c) $m_{t,1} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2(1+h)^2-(1+h)+1-(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2+4h+2h^2-1-h+1-2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h(2h+3)}{h} =$

$\lim\limits_{h\to 0}(2h+3) = 3$

Lösungen zu Grundwissensaufgaben 11. Jahrgangstufe – Teil 2

1. Ableiten mit Summen-, Produkt- und Quotientenregel

a) $f'(x) = 2x \cdot (x+2) + 2x^2 \cdot 1 = 4x^2 + 2x$

b) $f'(x) = 9x^2 + 2$

c) $f'(x) = 1 \cdot (3x^2 + 1) + (x+1) \cdot 6x = 9x^2 + 6x + 1$

d) $f'(x) = (4x^3 - 15x^2) \cdot (2x - 3) + (x^4 - 5x^3) \cdot 2$

e) $f'(x) = \frac{2x \cdot (2-x) - x^2 \cdot (-1)}{(2-x)^2}$

f) $f'(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x^2+1} = \frac{((x-1)+(x+2))(x^2+1)-(x+2)(x-1)2x}{(x^2+1)^2}$

2. Gebrochen-rationale Funktionen untersuchen

$f(x) = \frac{4x}{x^2-4}$ und $g(x) = \frac{x^3+1}{x^2+x+4}$.

a) Definitionsbereiche: $D_f = R\backslash\{-2; 2\}$

$D_g = R$, da $x^2 + x + 4 = 0$ keine Lösung hat

$f(-x) = -f(x)$ → punktsymmetrisch zum Ursprung

Graph von g hat keine Symmetrie zum Koordinatensystem, da sowohl gerade als auch ungerade Potenzen vorkommen.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ → waagrechte Asymptote $y = 0$

$\lim\limits_{x\to-2(-)} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-2(+)} f(x) = +\infty$ → senkr. Asymp. $x = -2$

$\lim\limits_{x\to2(-)} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to2(+)} f(x) = +\infty$ → senkr. Asymp. $x = 2$

c) $f'(x) = \frac{4(x^2-4) - 4x \cdot 2x}{(x^2-4)^2}$

$12x^2 - 16 = 0$ → $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

x	$x < -\sqrt{\frac{4}{3}}$	$-\sqrt{\frac{4}{3}}$	$-\sqrt{\frac{4}{3}} < x < \sqrt{\frac{4}{3}}$	$\sqrt{\frac{4}{3}}$	$\sqrt{\frac{4}{3}} < x$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	Steigt	MAX	Fällt	MIN	steigt

3. Stammfunktion

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + x + C$

Punkt $P(1|1)$ einsetzen: $1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 1 + C$ → $C = -\frac{1}{12}$

Steigung der Funktion f im Punkt $P(1|1)$: $f'(x) = 2x - 3x^2$ → $f'(1) = -1$

Steigung der Stammfunktion F im Punkt $P(1|1)$: $F'(x) = f(x)$ → $f(1) = 1$

4. Extrema und Kurvendiskussion

$f: x \mapsto -\frac{3}{2}x^4 + 10x^3 - 18x^2 + 4$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Grad 4, Vorfaktor negativ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

b) Symmetrie: Gerade und ungerade Exponenten gemischt → keine Symmetrie

c) Monotonieverhalten: $f'(x) = -6x^3 + 30x^2 - 36x$

$f'(x) = 0$ $f'(x) = -6x(x-2)(x-3)$ $x_1 = 0$ $x_2 = 2$ $x_3 = 3$

x	x<0	x=0	0<x<2	x = 2	2<x<3	x=3	x>3
f'(x)	+	0	-	0	+	0	-
f(x)	steigt	Max. (0|4)	fällt	Min. (2|-12)	steigt	Max. (3|-9,5)	fällt

d) Punkte: $A(1|-5{,}5)$ $B(2|-12)$

$m = -\frac{6{,}5}{1} = -6{,}5$ $t = y - mx = -5{,}5 + 6{,}5 = 1$

$y = -6{,}5x + 1$

Lösungen zu Grundwissensaufgaben 11. Jahrgangstufe – Teil 3

1. Wurzelfunktionen und verkettete Funktionen ableiten

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x-1}} \cdot 3$

b) $f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x + 2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x + 1)$

c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (-\sin x)$

d) $f'(x) = \cos(x^2 + 2) \cdot 2x + 3$

e) $f'(x) = 100(2x^2 + 1)^{99} \cdot 4x$

f) $f'(x) = \cos(\cos x) \cdot (-\sin x)$

g) $f'(x) = -1 \cdot (2 - x)^{-2} \cdot (-1)$

2. Wurzelfunktionen untersuchen

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{x-3} + 2$

a) Definitionsbereich: $D = [3; \infty[$ (Wertemenge: $W = [2; \infty[$)

Nullstellen: $\sqrt{x-3} = -2$ → keine Nullstellen

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$

Steigung der Tangente: $m = f'(4) = \frac{1}{2} = \tan\varphi$

$\varphi = 26{,}6°$

c) $f^{-1}(x) = (y-2)^2 + 3$

Definitionsmenge: $D_{f-1} = W_f = [2; \infty[$ Wertemenge: $W_{f-1} = D_f = [2; \infty[$

3. Umkehrfunktion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -2\sqrt{x} + 1$.

a) $D_f = [0; \infty[$

$W_f =]-\infty; 1]$

b) $\sqrt{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y$

$$x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

$W_{f-1} = D_f = [0; \infty[$ $D_{f-1} = W_f =]-\infty; 1]$

4. Sinusfunktion untersuchen

Gegeben ist die Kurvenschar $f(x) = a \cdot sinx + bx$ $(D_f = R)$

a) Untersuche die Scharkurven auf Symmetrie bzgl. des Koordinatensystems.

$\mathrm{f}(-\mathrm{x}) = \mathrm{a} \cdot \sin(-\mathrm{x}) + \mathrm{b} \cdot (-\mathrm{x}) = -\mathrm{a}\ \mathrm{sinx} - \mathrm{bx} = -\mathrm{f}(\mathrm{x})$

$\Rightarrow$ G_f ist punktsymmetrisch bzgl. $O(0|0)$

b) $f'(x) = a \cdot \cos x + b$

$f'(0{,}75\pi) = a \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + b = 0$ (I) und $f'(0{,}25\pi) = a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + b = \sqrt{2}$ (II)

II) − I) $\Rightarrow$ $a \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$ $\Rightarrow a = 1$ $\Rightarrow b = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

c) $f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $f'(x) = 0$

$\Rightarrow$ $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\Rightarrow x = \frac{3}{4}\pi$ oder $x = \frac{5}{4}\pi$

Steigungsbetrachtung ergibt

HOP $\left(\frac{3}{4}\pi \mid \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{8}\sqrt{2}\,\pi\right)$

TIP $\left(\frac{5}{4}\pi \mid -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{5}{8}\sqrt{2}\,\pi\right)$

Lösungen zu Grundwissensaufgaben 11. Jahrgangstufe – Teil 4

1. e-Funktion ableiten

Differenziere die folgenden Funktionen und bestimme die Nullstellen der Ableitungsfunktion:

a) $f(x) = e^x - x$ $\quad f'(x) = e^x - 1$ $\quad x_1 = 0$

b) $f(x) = e^{5x-3}$ $\quad f'(x) = e^{5x-3} \cdot 5$ $\quad$ keine Nullstelle

c) $f(x) = e^{x \cdot \sin x}$ $\quad f'(x) = e^{x \cdot \sin x} \cdot (1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x)$

Nullstelle: Näherungslösung der Gleichung $\tan x = -x$

d) $f(x) = 5 \cdot 2^{-x}$ $\quad f'(x) = 5 \cdot 2^{-x} \cdot \ln 2 \cdot (-1)$ $\quad$ keine Nullstelle

e) $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}$ $\quad f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x+1)-(e^{2x}-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x+1)^2}{(e^x+1)^2} = e^x$

keine Nullstelle

2. ln-Funktion ableiten

Differenziere die folgenden Funktionen und bestimme die Definitionsmenge:

a) $f(x) = \ln(4x+8)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{4x+8} \cdot 4 = \frac{1}{x+2}$ $\quad D =]-2; \infty[$

b) $f(x) = \ln(-x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot -1 = \frac{1}{x}$ $\quad D = R^+$

c) $f(x) = (x-e)\ln x$ $\quad f'(x) = 1 \cdot \ln x + (x-e) \cdot \frac{1}{x}$ $\quad D = R^+$

d) $f(x) = e^{2x} \cdot \ln(x+2)$ $\quad f'(x) = e^{2x} \cdot 2 \cdot \ln(x+2) + e^{2x} \cdot \frac{1}{x+2}$ $\quad D =]-2; \infty[$

e) $f(x) = \ln \frac{4x-2}{x+3}$ $\quad f'(x) = \frac{x+3}{4x-2} \cdot \frac{4(x+3)-1(4x-2)}{(x+3)^2} = \frac{14}{(4x-2)(x+3)}$

3. Kurvendiskussion einer e-Funktion

$f(x) = (x+2) \cdot e^{1-x}$

Symmetrie: $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ → weder achsensym. zur y-Achse, noch punktsym. zum Ursprung

Nullstellen: $e^{1-x} \neq 0$ → $(x+2) = 0$ → $x_1 = -2$

Extrema: $f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} + (x+2) \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = -(x+1) \cdot e^{1-x}$

$f'(x)$ hat Nullstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x_2 = -1$

$f(-1) = e^2$ → $MAX(-1|e^2)$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2) \cdot e^{1-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} (x+2) \cdot e^{1-x} = 0$ („e-Funktion gewinnt“)

4. Kurvendiskussion einer ln-Funktion

Untersuche die Funktion $f(x) = (1-x) \cdot \ln(3-x)$ auf Symmetrie, Nullstellen und das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs. Bestimme die Gleichung der Tangenten an den Graphen an der Stelle $x = 2$.

Symmetrie: $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ → weder achsensym. zur y-Achse, noch punktsym. zum Ursprung

Nullstellen: $\ln 1 = 0$ → $x_1 = -2$

$(1-x) = 0$ → $x_2 = 1$

Extrema: $f'(x) = -\ln(3-x) + \frac{x-1}{3-x}$

Verhalten an den Rändern: $D =]-\infty; 3[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (1-x) \cdot \ln(3-x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3-} (1-x) \cdot \ln(3-x) = +\infty$

Tangente: $f'(x) = -\ln(3-x) + \frac{x-1}{3-x}$

$f'(2) = 1$ und $f(2) = 0$

Punkt $(2|0)$ in $y = x + t$ einsetzen: $t = -2$

$t(x) = x - 2$

Lösungen zu Grundwissensaufgaben 11. Jahrgangstufe – Teil 5

1. **Funktionsterme mit vorgegebenen Eigenschaften**

Im Text sind drei Bedingungen vorgegeben → Grad 2 $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

I) A(1|3): 3 = a+b+c

II) N(-2|0): 0 = 4a-2b + c

III) f'(0) = 2 : 2 = b

Lösung des linearen Gleichungssystems

I – II : 3 = -3a + 3b

3 = -3a + 6 a = 1

in I: 3 = 1 + 2 + c c = 0

Lösung: $\mathrm{f(x) = x^2 + 2x}$

2. **Funktionsterme bestimmen**

$$f(x) = (x + a)e^{bx}$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{bx} + (x + a)e^{bx} \cdot b$$

Zwei Bedingungen für zwei Unbekannte:

I) $f(0) = 2$ → $a = 2$

II) $f'(0) = 4$ → $1 + ab = 4$ → $b = 1{,}5$

Somit: $f(x) = (x + 2)e^{1{,}5 \cdot x}$

3. **Geometrische Optimierung**

a) $F = l \cdot b = 100$ und somit $l = \frac{100}{b}$

Der Umfang ist: $f = 2b + 2l = 2b + 2\left(\frac{100}{b}\right)$ → $f(b) = 2b + \frac{200}{b}$

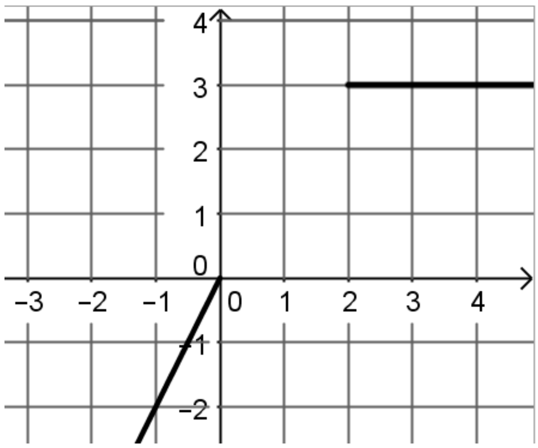
b) Suche Extremum von $f(b)$:

$f'(b) = 2 - \frac{200}{b^2} = 0$ → $b^2 = 100$

$b = 10$ (nur positive Lösung relevant)

Den minimalen Umfang hat ein Rechteck mit $100FE$, wenn es ein Quadrat mit Seitenlänge 10 ist.

4. **Kurven einpassen**



Funktion dann vier

Die beiden Streckenstücke sollen mit einer ganzrationalen Funktion verbunden werden.

a) I) $f(0) = 0$

II) $f'(0) = 2$

III) $f(2) = 3$

IV) $f'(2) = 0$

b) Wegen der vier Bedingungen muss die mindestens vom Grad drei sein, da sie Parameter hat:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

c) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

d) I) $0 = d$

II) $2 = c$

III) $3 = 8a + 4b + 2$

IV) $0 = 12a + 4b$

Lösung des linearen Gleichungssystems:

IV) – III): $-3 = 4a - 2$ → $a = -\frac{1}{4}$

In IV): $b = \frac{3}{4}$

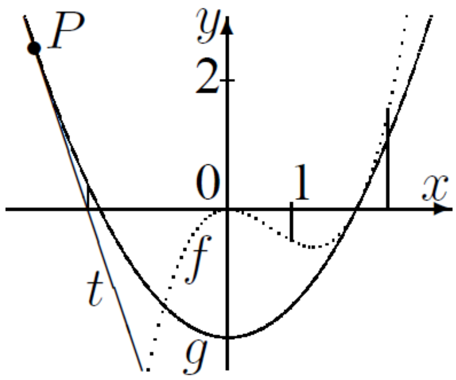
Funktionsterm: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 2x$

Lösungen zu Grundwissensaufgaben 12. Jahrgangstufe – Teil 6

1. **Graphische Bestimmung von Flächeninhalten**
   - Abschätzung der Fläche durch „Kästchen zählen“: ca. 10,5 Kästchen
   - Vier Kästchen entsprechen einer Flächeneinheit
   - Somit: $A \approx \frac{10{,}5}{4} \approx 2{,}6FE$

2. **Hauptsatz der Differentialrechnung**
   - Zeigen, dass $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ ist:
     Ableiten von $F(x)$, da $F'(x) = f(x)$
   - Bestimmtes Integral: $\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = 0 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

3. **Flächeninhalte zwischen Graphen, Achsen, …**



   a) Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 2$, wegen der Lage unterhalb der x-Achse gilt $A_1 = -\int_0^2 f(x)\,dx = -\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - x^2\right) dx = -\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = -\left(2 - \frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3}$

   b) Schnittstellen: $f(x) = g(x) \rightarrow x_{1/2} = 2$ und $x_3 = -1$
   $A_2 = \int_{-1}^2 (f(x) - g(x))dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2 + 4)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x\right]_{-1}^2 = \frac{27}{8}$

   c) $A_3 = \int_1^{2,5} \left(\frac{1}{2}x^3 - x^2\right) dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^{2,5} = \frac{1}{8}\cdot 2{,}5^4 - \frac{1}{3}\cdot 2{,}5^3 - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3}\right) \approx -0{,}117$ Von den Flächenstücken, die zu diesem Integral beitragen, liegt mehr unterhalb als oberhalb der x-Achse.

   d) $\int_0^b g(x)\,dx = \int_0^b (\frac{1}{2}\,x^2 - 2)\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 - 2x\right]_0^b = \frac{1}{6}b^3 - 2b = \ 0,$
   somit $b\left(\frac{1}{6}b^2 - 2\right) = 0$ und daraus $b_1 = 0,\ b_{2/3} = \pm 2\sqrt{3}$
   Bei $b = 0$ geht das Integral von 0 bis 0 und ist somit Null, bei $b = \pm 2\sqrt{3}$ sind die Flächen ab dem Ursprung ober- und unterhalb der x-Achse gleich groß.

4. **Berechnen von bestimmten Integralen**
   Berechne:

   a) $\int_{-\pi}^0 (\sin x - \frac{1}{2}x)\,dx = \left[-\cos x - \frac{1}{4}x^2\right]_{-\pi}^0 = -1 - 0 - \left(1 - \frac{1}{4}\pi^2\right) = \frac{1}{4}\pi^2 - 2$

   b) $\int_1^2 \sqrt{3x-2}\,dx$ mit $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\cdot F(ax+b) + C$
   $\int_1^2 \sqrt{3x-2}\,dx = \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(3x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{16}{9} - \frac{2}{9} = \frac{14}{9}$

   c) $\int_{-2}^{-1} \frac{x^3+x+2}{x^2}\,dx = \int_{-2}^{-1} (x + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2})\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \ln|x| - \frac{2}{x}\right]_{-2}^1 = \frac{1}{2} - 0 - 2 - (2 + \ln 2 + 1) = -4{,}5 + \ln 2$

   d) $\int_0^4 (4\sqrt[3]{x} - 5)\,dx = \left[4\cdot\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}} - 5x\right]_0^4 = 3\cdot 4^{\frac{4}{3}} - 20 - (0-0) \approx -0{,}95$

   e) $\int_0^1 4x\cdot e^{x^2}\,dx$ mit $\int f'(x)\cdot e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$
   $\int_0^1 4x\cdot e^{x^2}\,dx = 2\int_0^1 2x\cdot e^{x^2}\,dx = 2\left[e^{x^2}\right]_0^1 = 2(e-1)$

Lösungen zu Grundwissensaufgaben 12. Jahrgangstufe – Teil 7

1. Erste und zweite Ableitung

a) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{x}$

$f'(x)=x^2+2x+x^{-2}$

$f''(x)=2x+2-2x^{-3}$

b) $f(x)=x\cdot e^{-x}$

$f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot e^{-x}\cdot(-1)=(1-x)\cdot e^{-x}$

$f'(x)=-1\cdot e^{-x}+(1-x)\cdot e^{-x}\cdot(-1)=(x-2)\cdot e^{-x}$

2. Krümmung und Wendepunkte

$NS: lnx=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=e^{-0,5}\quad\Longrightarrow\quad N(e^{-0,5}|0)$

$$f'(x)=\frac{x^2\cdot\frac{2}{x}-(2lnx+1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2x-4xlnx-2x}{x^4}=\frac{-4xlnx}{x^4}=\frac{-4lnx}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{x^3\cdot\left(-\frac{4}{x}\right)-(-4lnx)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{-4x^2+12x^2lnx}{x^6}=\frac{x^2(-4+12lnx)}{x^6}=\frac{12lnx-4}{x^4}$$

$f'(x)=0\ \Longrightarrow\ lnx=0\quad\Rightarrow x=1\ \mid\ f(1)=1\ und\ f''(1)=-4<0\quad\Longrightarrow HOP\ (1|1)$

$f''(x)=0\quad\Rightarrow 12lnx-4=0\quad lnx=\frac{1}{3}\Rightarrow x=e^{\frac{1}{3}}\quad\mid\quad f\left(e^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{\frac{2}{3}+1}{e^{\frac{2}{3}}}=\frac{5}{3e^{\frac{2}{3}}}$

$f''(x)$ ändert $VZ\quad\Longrightarrow\quad WP\ \left(e^{\frac{1}{3}}\mid\frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}}\right)$ [Wendetangente: $y=-\frac{4}{3e}x+3e^{-\frac{2}{3}}$]

3. Wendepunkt von Funktionenscharen

Gegeben ist die Funktionenschar $g_k(x)=\frac{4-kx}{x^2}$ mit $k\in\mathbb{R}$.

a) $g'_k(x)=\frac{-k\cdot x^2-(4-kx)\cdot 2x}{x^4}=\frac{kx-8}{x^3}$

$g''_k(x)=\frac{k\cdot x^3-3x^2\cdot(kx-8)}{x^6}=\frac{24-2kx}{x^4}$

Notwendige Bedingung für Wendepunkt: $g''_k(x)=0\ \rightarrow 24-2kx=0$

Für $k=0$ kein Wendepunkt!

b) $24-2kx=0\qquad x_1=\frac{12}{k}$

$g_k(x_1)=\frac{4-k\cdot\frac{12}{k}}{\frac{144}{k^2}}=-\frac{k^2}{18}\qquad\rightarrow\qquad WP\left(\frac{12}{k}\middle|-\frac{k^2}{18}\right)$

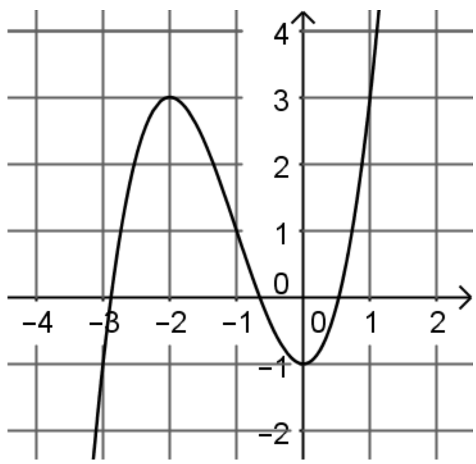
c) Wendepunkt für k = 1: $WP(2|-2)$

$g'_6(2)=\frac{1}{2}$

WP in Ansatz $y=\frac{1}{2}x+t$ einsetzen: $\qquad -2=\frac{1}{2}\cdot 2+t\qquad\rightarrow\qquad t=-3$

$t(x)=\frac{1}{2}x-3$

4. Wendepunkt einer Funktionenschar



a) Wendepunkte, wenn der Funktionsgraph G_f sein Krümmungsverhalten ändert. In der Abbildung wechselt der Graph bei $(-1|1)$ sein Krümmungsverhalten von rechts- nach linksgekrümmt.

b) Extremstellen der Ableitungsfunktion $f'(x)$ sind Wendestellen der Funktion$f(x)$. Wendestellen sind somit $x=-2$ und $x=0$.

c) Nullstellen mit Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitungsfunktion $f''(x)$ sind Wendestellen von $f(x)$. Wendestellen sind somit $x=-2{,}8$, $x=-0{,}6$ und $x=0{,}5$.

Lösungen zu Grundwissensaufgaben 12. Jahrgangstufe – Teil 8

1. Wachstums- und Zerfallsprozesse

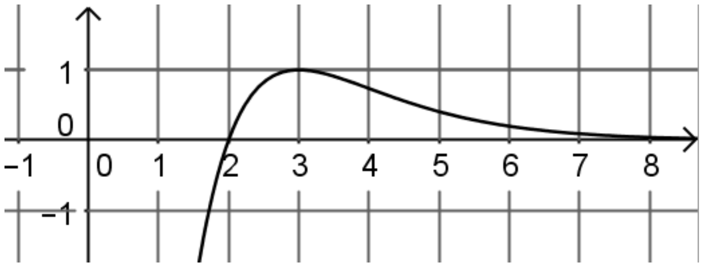
a) zu V): a bestimmt den Startwert und b die Halbwertszeit
b) zu II): b bestimmt, wie schnell die Hüllkurve abfällt
c) zu I): c beschreibt den Endwert, z.B. die Raumtemperatur, $(a + c)$ den Startwert
d) zu IV): a beschreibt den Startwert und b, wie schnell das Wachstum abläuft
e) zu III): a beschreibt den Endwert

a)	Radioaktiver Zerfall
b)	Exponentielle Abnahme (als Hüllkurve) beim Schwingkreis
c)	Abkühlung einer heißen Flüssigkeit
d)	Exponentielles (unbeschränktes) Wachstum bei Geldverzinsung
e)	Aufheizen eines Backofens

I)	$f(x) = a \cdot e^{-b \cdot x}$+c
II)	$f(x) = g(x) \cdot e^{-b \cdot x}$
III)	$f(x) = a(1 - e^{-b \cdot x})$
IV)	$f(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$
V)	$f(x) = a \cdot e^{-b \cdot x}$

2. Funktionsterme finden

I) $f(2) = 0$
II) $f'(3) = 0$
III) $f(3) = 1$
IV) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$



Ansatz: $\mathrm{f(x) = a(x - 2)e^{-bx}}$
$\mathrm{f'(x) = a(1 - bx + 2b)e^{-bx}}$
Lösung: $f(x) = e^3(x - 2)e^{-x}$

3. Geometrische Optimierung

Zu optimierende Größe: Querschnittsfläche in Abhängigkeit des Winkels β
Randbedingungen: $c = 30cm$ und $b = 10cm$

Trapezfläche berechnen: $h = b \cdot \sin\beta$ $\qquad a = c + 2 \cdot b \cdot \cos\beta$

$$A(\beta) = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h = \frac{1}{2}(c + 2 \cdot b \cdot \cos\beta + c) \cdot b \cdot \sin\beta = (c + b\cos\beta)b\sin\beta$$

Zielfunktion optimieren:

$$A'(\beta) = -b\sin\beta \cdot b\sin\beta + (c + b\cos\beta) \cdot b\cos\beta$$
$$A'(\beta) = 2b^2\cos^2\beta + bc\cos\beta - b^2$$
$$A'(\beta) = 200\cos^2\beta + 300\cos\beta - 100 = 0$$

→ $\cos\beta = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{4}$

Einzig relevante Lösung: $\cos\beta = \frac{-3 + \sqrt{15}}{4} \cong 0{,}218$

→ $\beta = 77{,}4°$

4. Kurvendiskussion zusammengesetzter Funktionen

a) $\mathrm{f_a'(x) = (1 - x + a) \cdot e^{-x}}$
$\mathrm{f_a''(x) = (x - a - 2) \cdot e^{-x}}$ Nullstelle f“ mit Vorzeichenwechsel bei $x = a + 2$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{f(x)} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{f(x)} = -\infty$