Aufgaben zum Grundwissen Mathematik

12. Jahrgangstufe

Analytische Geometrie

Diese Aufgaben zeigen, welche grundlegenden Fertigkeiten die Schülerinnen und Schüler in diesem Lehrplanabschnitt erlernen müssen. Diese Aufgaben sollten die Schülerinnen und Schüler also sicher lösen können. Da viele Abituraufgaben komplexer sind und einzelne Aufgabentypen vernetzen, garantiert das Beherrschen dieser Aufgaben jedoch noch keine gute oder sehr gute Abiturnote.

1. Gegeben sind die Geraden $g_1 \colon \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $g_2 \colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $g_3 \colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $g_4 \colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$.

   Untersuchen Sie jeweils die Lagebeziehung:

   (a) g_1 und g_2; (b) g_2 und g_3; (c) g_3 und g_4; (d) g_1 und g_4;

   falls sich die Geraden schneiden, bestimmen Sie auch den Schnittwinkel; falls die Geraden parallel sind, bestimmen Sie auch den Abstand.

2. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und der gegebenen Ebene; falls sie sich schneiden, berechnen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel, falls sie echt parallel sind, den Abstand $d(g, E)$.

   (a) $E : x_1 - x_2 - 5x_3 = 26$
   (b) $E : 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 8 = 0$
   (c) $E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$

3. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen; falls sie parallel sind, bestimmen Sie den Abstand; falls sie sich schneiden, Schnittgerade und Schnittwinkel.

   (a) $E_1 : 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6$ und $E_2 : 4x_1 - x_2 + 8x_3 = 9$
   (b) $E_1 : 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6$ und $E_2 : -x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 6$
   (c) $E_1 : 14x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$ und $E_2 : 3{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 1$

4. Geben Sie zur Ebene $E : x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4$ die Gleichung einer Ebene F an, die darauf senkrecht steht und die Gerade $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, enthält.

5. Gegeben sind die Ebenen $E : 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 14$ und $F : -x_1 + 4x_2 + x_3 = -12$.

   (a) Berechnen Sie jeweils die Hesse-Normalform (HNF)!
   (b) Liegt der Punkt $P(4|2|-6)$ näher an E oder an F?
   (c) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte $(0|0|x_3)$ auf der x_3-Achse, die Abstand 10 von der Ebene E haben.
   (d) Welchen Gleichung hat eine Kugel um $M(9|7|6)$, die die Ebene E genau berührt? Falls die Kugel k um M den Radius 13 hat, welchen Radius hat dann der Schnittkreis mit der Ebene E?