

# Aufgaben zum Grundwissen Mathematik

## 12. Jahrgangstufe

### Analytische Geometrie - Lösungen

1. (a)  $\vec{M} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$ , also  $M(4|2|0,5)$ . (b)

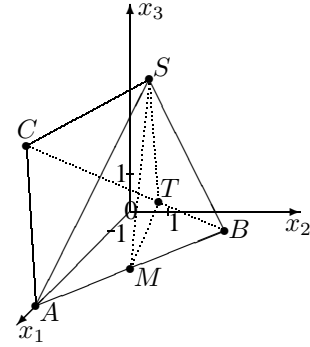
$$\vec{CT} = \frac{2}{3}\vec{CB}, \text{ d. h. } \vec{T} - \vec{C} = \frac{2}{3}(\vec{B} - \vec{C}), \text{ also}$$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -2 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 - 1,5 \\ 4 - (-2) \\ 1 - 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix}, T(2,5|2|1,5).$$

(c)  $V_{ABCS} = \frac{1}{6}|(\vec{AB} \times \vec{AC}) \circ \vec{AS}| =$   
 $= \frac{1}{6} \left| \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3,5 \\ -2 \\ 2,5 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| =$

$$= \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 1,5 \\ 18 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} |-24 + 3 + 90| = \frac{23}{2}.$$

$$\text{Analog } V_{MBTS} = \frac{1}{6}|(\vec{MB} \times \vec{MT}) \circ \vec{MS}| = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0,25 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4,5 \end{pmatrix} \right| = \frac{23}{12}.$$



2. (a)  $|\vec{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 1 + 0} = \sqrt{10}.$

$$\text{Analog } |\vec{BD}| = |\vec{D} - \vec{B}| = \sqrt{0,25 + 2,25 + 0} = \sqrt{2,5} = \frac{1}{2}\sqrt{10},$$

$$|\vec{AD}| = |\vec{D} - \vec{A}| = \sqrt{12,25 + 0,25 + 0} = \sqrt{12,5} = \frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

$$\alpha = \sphericalangle(\vec{AB}, \vec{AD}): \cos \alpha = \frac{\vec{AB} \circ \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|} = \frac{3 \cdot 3,5 + (-1) \cdot 0,5 + 0 \cdot 0}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{12,5}} \approx 0,894, \text{ also } \alpha \approx 26,6^\circ.$$

$$\beta = \sphericalangle(\vec{BA}, \vec{BD}): \cos \beta = \frac{\vec{BA} \circ \vec{BD}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BD}|} = \frac{-3 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1,5 + 0 \cdot 0}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{2,5}} = 0, \text{ also } \beta = 90^\circ.$$

Gemäß der Winkelsumme im Dreieck ist  $\delta = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 63,4^\circ.$

(b)  $\vec{DC} = \vec{AB}$ , also  $\vec{C} = \vec{D} + \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$ , also  $C(5,5|-1,5|1).$

(c)  $\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$  Die Länge 5 dieses Vektorprodukts ist die Fläche des Parallelogramms  $ABCD.$

Die  $x_3$ -Richtung dieses Vektors musste sich ergeben, da  $\vec{AB} \times \vec{AD}$  senkrecht auf  $\vec{AB}$  und  $\vec{AD}$  steht, also senkrecht auf der Parallelogramm-Fläche, und dieses liegt wegen der gemeinsamen  $x_3$ -Koordinate in der zur  $x_1x_2$ -Grundebene parallelen Ebene  $x_3 = 1.$

(d)  $A'B'D'$  ist ebenso wie  $ABD$  ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Ecken auf dem Thaleskreis über  $[A'D']$  liegen, also mit Mittelpunkt  $M'(0,75|-0,75)$  (aus  $\vec{M}' = \frac{1}{2}(\vec{A}' + \vec{D}')$ ) und Radius  $r = \frac{1}{2}|\vec{A}'\vec{D}'| = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}\sqrt{2} = \frac{5}{4}\sqrt{2}$  (also  $r^2 = \frac{25}{16} \cdot 2 = \frac{25}{8}$ ).

3.  $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - (-5))^2 + (x_3 - 0)^2 = 6^2$ , also  $(x_1 - 3)^2 + (x_2 + 5)^2 + x_3^2 = 36$  (bzw. ausquadriert  $x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 + 10x_2 + x_3^2 = 2$ ).

Wegen  $|\vec{MO}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 0} = \sqrt{34} < 6$  liegt  $O$  innerhalb der Kugel.

4.  $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1}{\sqrt{16 + 9 + 0} \cdot \sqrt{4 + 4 + 1}} \approx -0,133$ , also  $\varphi \approx 97,7^\circ.$