Aufgaben zum Grundwissen Mathematik
12. Jahrgangstufe

Analytische Geometrie - Lösungen Teil 1

1.
Q liegt nicht auf g, denn:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Rightarrow \lambda = -1 \\ \checkmark \\ \lightning \end{matrix}$$
$R(0|2|1)$ liegt auf g, denn:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Rightarrow \lambda = -2 \\ \text{Probe: passt!} \\ \text{Probe: passt!} \end{matrix}$$
S liegt nicht auf g, denn:
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Rightarrow \lambda = 3 \\ \lightning \\ \end{matrix}$$
Für die x_3-Koordinate von T gilt: $0 = -1 - \lambda$, also $\lambda = -1$, also $T(1|4|0)$.

2.
$$AB : \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
C liegt auf g: Wähle $\lambda = \frac{2}{3}$.
D liegt auf g: Wähle $\lambda = -2{,}5$.

3.
$$AB : \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
Ansatz: $F(-1+3\lambda|-1-\lambda|1)$.
$DF \perp g$, also $\begin{pmatrix} -1+3\lambda-2{,}5 \\ -1-\lambda+0{,}5 \\ 1-1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$
$(-3{,}5+3\lambda)\cdot 3 + (-0{,}5-\lambda)\cdot(-1) + 0 = 0.$
$-10 + 10\lambda = 0.$ $\lambda = 1$. Also $F(2|-2|1)$.
Abstand $d(D, AB) = |\overrightarrow{DF}| =$
$= \sqrt{(2-2{,}5)^2 + (-2+0,5)^2 + (1-1)^2} =$
$= \sqrt{2{,}5}$.
Dreiecksfläche A_{ABD}: $[DF]$ ist die Höhe im Dreieck ABD auf der Grundlinie $[AB]$, also $A_{ABD} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{DF} =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2{,}5} = \frac{5}{2}$.
Gleiches Ergebnis bei Berechnung mit dem Vektorprodukt: $A_{ABD} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}| = \frac{5}{2}$ (vgl. ueb119.pdf, Aufgabe 2(c)).

4.
(a) Aufpunkt $(0|0|0)$, also ist g eine Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems.

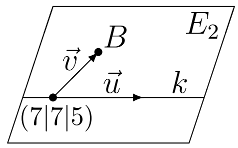
(b) x_2-Komponente konstant 5, also ist h parallel zur x_1x_3-Ebene.

Aufgaben zum Grundwissen Mathematik
12. Jahrgangstufe

Analytische Geometrie - Lösungen Teil 2

5. (a) $E_1 : \vec{X} = \vec{A} + \lambda(\vec{B} - \vec{A}) + \mu(\vec{C} - \vec{A}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$,
$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. (Möglich sind auch Lösungen z. B. mit $\vec{X} = \vec{B} + \lambda(\vec{A} - \vec{B}) + \mu(\vec{C} - \vec{B})$).

(b) B in k: $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert $5 = 7 - 5\sigma$, also $\sigma = 0{,}4$, Probe in zweite Gleichung $8 = 7 - 5\sigma$ Widerspruch, also B nicht auf k.



$E_2 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(c) $E_3 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(d) $E_4 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

6. (a) Mit den Punkten A_1, $A_2(0|4|0)$, A_3 stellt man die Gleichung der Ebene auf:
$E : \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(b) $\overrightarrow{ZA_i'} = \overrightarrow{A_iZ}$, also $\vec{A_i'} - \vec{Z} = \vec{Z} - \vec{A_i}$, also $\vec{A_i'} = 2\vec{Z} - \vec{A_i}$ liefert $A_1'(6|4|0)$, $A_2'(0|0|0)$, $A_3'(0|4|-4)$.
Mit diesen Punkten stellt man die Gleichung von E' auf:
$E' : \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.