Aufgaben zum Grundwissen Mathematik
12. Jahrgangstufe

Analytische Geometrie - Lösungen

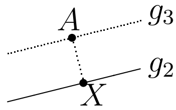
1.

(a) Ri.vektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ sind nicht parallel. Gleichsetzen ergibt $-1+\lambda=1$, $-1=2+\mu$, $1-3\lambda=4+3\mu$. Also $\lambda = 2$, $\mu = -3$, Probe in dritte Gleichung stimmt.
Also schneiden sich g_1 und g_2.
Schnittpunkt $S(1|-1|-5)$.
Schnittwinkel φ aus $\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|} = \frac{|1\cdot 0+0\cdot 1+(-3)\cdot 3|}{\sqrt{1+0+9}\cdot\sqrt{0+1+9}} = 0{,}9$, also $\varphi \approx 25{,}84°$.

(b) Ri.vektoren $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ parallel ($\vec{u}_3 = 2\vec{u}_2$). Aufpunkt von g_3 $(2|4|8)$ eingesetzt in g_2 ergibt bereits in der ersten Zeile $2 = 1+0\mu$ einen Widerspruch, also sind g_2 und g_3 echt parallel.

Abstand des g_3-Aufpunkts $A(2|4|8)$ von der Geraden g_2:
Fußpunkt X als allg. g_2-Geradenpunkt ansetzen: $X(1|2+\mu|4+3\mu)$. Bedingung: $\overrightarrow{AX} \perp g_2$, also $\overrightarrow{AX} \circ \vec{u}_2 = 0$;

$$\begin{pmatrix} 1-2 \\ 2+\mu-4 \\ 4+3\mu-8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0;$$



$(-1)\cdot 0+(-2+\mu)\cdot 1+(-4+3\mu)\cdot 3 = 0$;
$10\mu = 14$; $\mu = 1{,}4$; also $X(1|3{,}4|8{,}2)$.

(Fortsetzung von Aufgabe 1(b))
Gesuchter Abstand $d(g_2, g_3) = |\overrightarrow{AX}|$
$= \sqrt{(1-2)^2+(3{,}4-4)^2+(8{,}2-8)^2}$
$= \sqrt{1{,}4} \approx 1{,}18$.

(c) Ri.vektoren $\vec{u}_3 \| \vec{u}_4$ ($\vec{u}_4 = -1{,}5\vec{u}_3$). Aufpunkt von g_4 $(2|-4|-16)$ eingesetzt in g_3 ergibt $2 = 2$, $-4 = 4+2\sigma$, $-16 = 8+6\sigma$; aus zweiter Gleichung also $\sigma = -4$, Probe in erster Gleichung stimmt sowieso, in dritter Gleichung $-16 = 8+6\cdot(-4)$ stimmt ebenfalls, also sind g_3 und g_4 identisch.

(d) Ri.vektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_4$ sind nicht parallel. Gleichsetzen ergibt $-1+\lambda = 2$, $-1 = -4-3\tau$, $1-3\lambda = -16-9\tau$. Aus erster und zweiter Gleichung folgen $\lambda = 3$ und $\tau = -1$; Probe in dritter Gleichung $-8 \neq -7$; g_1 und g_4 sind also windschief.

2.

Einsetzen des allgemeinen Geradenpunkts $(\lambda|9-4\lambda|-7+\lambda)$ liefert:

(a) $\lambda-(9-4\lambda)-5(-7+\lambda) = 26$; $26 = 26$ (wahr); g liegt in E.

(b) $3\lambda+(9-4\lambda)+2(-7+\lambda)+8 = 0$; $\lambda = -3$; g und E schneiden sich im Punkt $S(-3|21|-10)$.
Schnittwinkel ψ: $\sin\psi = \frac{|1\cdot 3+(-4)\cdot 1+1\cdot 2|}{\sqrt{1+16+1}\cdot\sqrt{9+1+4}} \approx 0{,}063$; $\psi \approx 3{,}61°$.

(c) $2\lambda+(9-4\lambda)+2(-7+\lambda) = 5$; $-5 = 5$; g und E sind echt parallel.
HNF von E: $|\vec{n}| = \sqrt{4+1+4} = 3$, also $E: \frac{1}{3}(2x_1+x_2+2x_3-5) = 0$; $d(g,E) = |\frac{1}{3}(2\cdot 0+9+2\cdot(-7))| = \frac{5}{3}$.

3.

Einsetzen des allgemeinen Geradenpunkts $(\lambda|9-4\lambda|-7+\lambda)$ liefert:

(a) $\lambda-(9-4\lambda)-5(-7+\lambda) = 26$; $26 = 26$ (wahr); g liegt in E.

(b) $3\lambda+(9-4\lambda)+2(-7+\lambda)+8 = 0$; $\lambda = -3$; g und E schneiden sich im Punkt $S(-3|21|-10)$.
Schnittwinkel ψ: $\sin\psi = \frac{|1\cdot 3+(-4)\cdot 1+1\cdot 2|}{\sqrt{1+16+1}\cdot\sqrt{9+1+4}} \approx 0{,}063$; $\psi \approx 3{,}61°$.

(c) $2\lambda+(9-4\lambda)+2(-7+\lambda) = 5$; $-5 = 5$; g und E sind echt parallel.
HNF von E: $|\vec{n}| = \sqrt{4+1+4} = 3$, also $E: \frac{1}{3}(2x_1+x_2+2x_3-5) = 0$; $d(g,E) = |\frac{1}{3}(2\cdot 0+9+2\cdot(-7))| = \frac{5}{3}$.

Aufgaben zum Grundwissen Mathematik 12. Jahrgangstufe

Analytische Geometrie - Lösungen

4.

Skalarprodukt ausführen: $3(x_1+2)+3x_2-(x_3-9)=0$, also $3x_1+3x_2-x_3=-15$.
P in E ergibt eine wahre Aussage:

$3\cdot 1+3\cdot(-4)-3=15$ (wahr).

5.

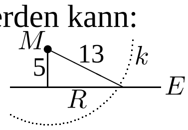
(a) $|\vec{n}_E| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+4+36} = 7$,
HNF: $E : \frac{1}{7}(3x_1-2x_2+6x_3-14)=0$.
$|\vec{n}_F| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$,
HNF: $F : \frac{1}{3\sqrt{2}}(x_1-4x_2-x_3-12)=0$.

(b) Mit der HNF berechnet man den Abstand des Punktes P von den Ebenen:
$d(P,E) = |\frac{1}{7}(3\cdot 4-2\cdot 2+6\cdot(-6)-14)| = 6$.
$d(P,F) = |\frac{1}{3\sqrt{2}}(4-4\cdot 2-(-6)-12)| = \frac{10}{3\sqrt{2}} \approx 2{,}36$.
Also liegt P näher an F.

(c) Bei Einsetzen in die HNF muss 10 oder -10 resultieren:
$\frac{1}{7}(6x_3-14)=\pm 10$, also
$x_3 = \frac{\pm 70+14}{6}$, die gesuchten Punkte sind also $(0|0|14)$ und $(0|0|-\frac{28}{3})$.

(d) Radius $r = d(M,E) = |\frac{1}{7}(3\cdot 9-2\cdot 7+6\cdot 6-14)| = 5$.
Also Kugel (→ grund119.pdf):
$(x_1-9)^2+(x_2-7)^2+(x_3-6)^2=25$.

Aus der Skizze erkennt man, dass der Radius R des Schnittkreises mit Pythagoras berechnet werden kann:



$5^2+R^2=13^2$, also $R=12$.