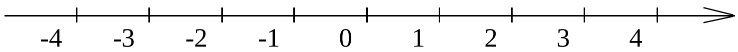
Zahlen

Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; ...\}$
Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$

Bsp.: $43 \in \mathbb{N}$; die Zahl 43 ist Element der (d. h. gehört zu den) natürlichen Zahlen

Auf der Zahlengeraden gilt:
Je weiter rechts eine Zahl steht, desto größer ist sie.



$7 > 5$; $0 > -3$; $-5 > -7$

Zahlen, die sich (wie -3 und 3) nur im Vorzeichen unterscheiden, heißen Gegenzahlen.

Große Zahlen, Zehnerpotenzschreibweise

1 000 000 = 10^6 = 1 Million
1 000 000 000 = 10^9 = 1 Milliarde
1 000 000 000 000 = 10^{12} = 1 Billion

103 015 789 312 514 =
hundertdrei Billionen fünfzehn Milliarden siebenhundertneunundachtzig Millionen dreihundertzwölftausendfünfhundertvierzehn

60 000 000 = $6 \cdot 10^7$

Primzahlen sind natürliche Zahlen größer als 1, die ohne Rest nur durch 1 und sich selbst teilbar sind, also 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
Jede andere natürliche Zahl lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Grundrechenarten, Terme

Addition:	Summe	=	1. Summand	+	2. Summand
Subtraktion:	Differenz	=	Minuend	–	Subtrahend
Multiplikation:	Produkt	=	1. Faktor	·	2. Faktor
Division:	Quotient	=	Dividend	:	Divisor

Schriftliches Multiplizieren und Dividieren

```
2348 · 315        739620 : 315 = 2348
    7044          -630
     2348           1096
     11740         -945
    739620           1512
                    -1260
                      2520
                     -2520
                         0
```

Potenzschreibweise für die Multiplikation von mehreren gleichen Faktoren, z. B. $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

Rechengesetze

„Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich"

$17 + (24 + 26) \cdot 8^2$
$= 17 + 50 \cdot 64$
$= 17 + 3200 = 3217$

Besondere Gesetze (für a, b, c werden Zahlen eingesetzt):
Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)
$a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)
$(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

$117 + 25 = 25 + 117$
$23 \cdot 6 = 6 \cdot 23$

$(48 + 64) + 36 = 48 + (64 + 36)$
$(37 \cdot 25) \cdot 40 = 37 \cdot (25 \cdot 40)$

$87 \cdot 9 = (80 + 7) \cdot 9 = 80 \cdot 9 + 7 \cdot 9$

Regeln beim Rechnen mit negativen Zahlen

Positive und negative Zahlen kann man oft durch Guthaben und Schulden veranschaulichen.

Statt eine negative Zahl zu addieren, kann man ihre Gegenzahl subtrahieren.
Statt eine negative Zahl zu subtrahieren, kann man ihre Gegenzahl addieren.

$17 – 25 = -8$
$-34 – 17 = -51$
$-85 + 14 = -71$
$35 + (-17) = 35 – 17 = 18$
$47 – (-23) = 47 + 23 = 70$

Beim Multiplizieren und Dividieren rechnet man zunächst ohne Rücksicht auf das Vorzeichen. Waren beide Vorzeichen gleich, ist das Ergebnis positiv, sonst negativ.

$17 \cdot (-4) = -68$
$(-8) \cdot (-7) = 56$
$45 : (-5) = -9$
$(-72) : (-9) = 8$

Zählprinzip

Situationen, bei denen man mehrere Dinge auswählen und beliebig miteinander kombinieren kann, kann man in einem Baumdiagramm darstellen. Nach dem Zählprinzip erhält man die Anzahl aller Möglichkeiten durch Multiplikation der Anzahlen der Möglichkeiten in jeder Stufe.

Pia will aus 3 Hosen, 5 Shirts und 4 Paar Schuhen ein Outfit kombinieren.
Dafür gibt es $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ Möglichkeiten.

Größen und Einheiten

Eine **Größe** besteht aus einer Maßzahl und einer (Maß-)Einheit.

z. B. Länge 23 cm

Geldeinheiten

1 € = 100 Cent

37,45 € = 37 € 45 Cent = 3745 Cent

Masseeinheiten

1 t = 1000 kg
1 kg = 1000 g
1 g = 1000 mg

2,625 t = 2 t 625 kg = 2625 kg
1,2345 kg = 1234,5 g = 1 234 500 mg
3 t 5,5 kg = 3005,5 kg = 3,0055 t

Längeneinheiten

1 km = 1000 m
1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm
1 dm = 10 cm
1 cm = 10 mm

1 km = 100 000 cm = 1 000 000 mm
0, 25 km = 250 m = 25 000 cm
3,457 m = 3 m 4 dm 5 cm 7 mm
3,457 m = 34,57 dm = 345,7 cm

Flächeneinheiten

1 km^2 = 100 ha
1 ha = 100 a
1 a = 100 m^2
1 m^2 = 100 dm^2
1 dm^2 = 100 cm^2
1 cm^2 = 100 mm^2

1 km^2 = 1 000 000 m^2
1 m^2 = 1 000 000 mm^2
1 km^2 = 1 000 000 000 000 mm^2
1,23456 ha = 1 ha 23 a 45 m^2 60 dm^2
1,23456 ha = 123,456 a = 12345,6 m^2
1 m^2 2 dm^2 3 cm^2 4 mm^2 = 1,020304 m^2

Zeiteinheiten

1 d = 24 h
1 h = 60 min
1 min = 60 s

1 h = 60 · 60 s = 3600 s
2 h 37 min = 120 min + 37 min = 157 min
10 min 5 s = 600 s + 5 s = 605 s

Ist der Umwandlungsfaktor eine Stufenzahl, so verschiebt sich das Komma beim Umwandeln um so viele Stellen, wie die Stufenzahl Nullen hat.

Der Maßstab

Der Maßstab eines Plans, einer Karte oder eines Modells gibt an, wie viel mal so lang eine Länge in Wirklichkeit ist.
Bsp. 1 : 50 000 - alles ist in Wirklichkeit 50 000 mal so lang.

Beispiel für Maßstab 1 : 50 000

Länge auf der Karte 5 cm
wirkliche Länge 2,5 km

Umrechnung:
5 cm · 50000 = 250 000 cm = 2,5 km
2,5 km : 50000 = 250 000 cm : 50000 = 5 cm

Daten und Diagramme

Daten (z. B. Zahlenangaben) können in Tabellen übersichtlich dargestellt und mit Hilfe von Diagrammen veranschaulicht werden.

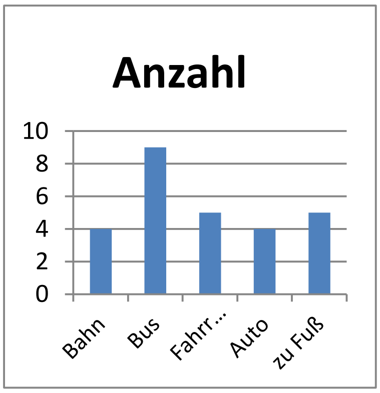
Bsp.: Mit welchen Hauptverkehrsmitteln kommen die Schüler der Klasse 5c zur Schule?

Verkehrsmittel	Anzahl
Bahn	4
Bus	9
Fahrrad	5
Auto	4
zu Fuß	5

Figurendiagramm

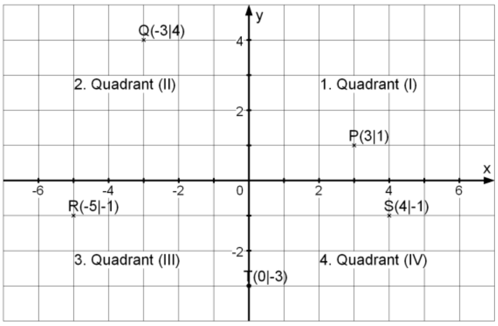
Bahn ☺☺☺☺
Bus ☺☺☺☺☺☺☺☺☺
Fahrrad ☺☺☺☺☺
Auto ☺☺☺☺
zu Fuß ☺☺☺☺☺

Säulendiagramm



Geometrie

Das Koordinatensystem

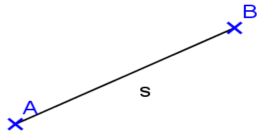


Zwei Zahlengeraden bilden die x-Achse (nach rechts) und die y-Achse (nach oben). Die Lage eines Punktes ist durch seine Koordinaten (erst x, dann y) festgelegt.

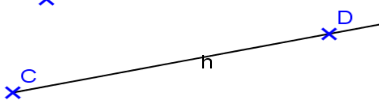
Grundbegriffe

Grundelemente sind die **Punkte**. Sie werden durch Kreuzchen dargestellt und mit Großbuchstaben bezeichnet.
Für Linien verwendet man Kleinbuchstaben oder man beschreibt sie durch die Namen der Punkte, die sie festlegen.

Eine **Strecke** ist die geradlinige Verbindung zweier Punkte, z. B. s = [AB]
Für die Länge der Strecke schreibt man auch $\overline{AB}$.

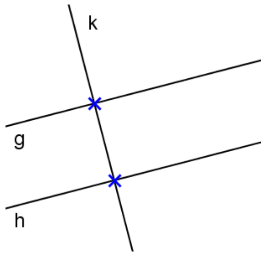


Eine **Halbgerade** hat einen Anfangspunkt, aber keinen Endpunkt, z. B. h = [CD



Eine **Gerade** hat weder Anfangs- noch Endpunkt (ist unbegrenzt), z. B. g = EF

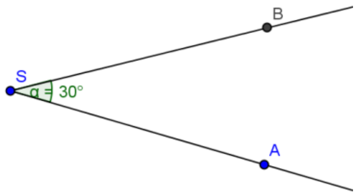
Besondere Lage von Geraden



Zwei Geraden g und h, die überall den gleichen Abstand voneinander haben, heißen zueinander **parallel**.
Man schreibt $g \parallel h$.

Zwei Geraden g und k, die sich rechtwinklig kreuzen, heißen zueinander **senkrecht**.
Man schreibt $g \perp k$.

Winkel

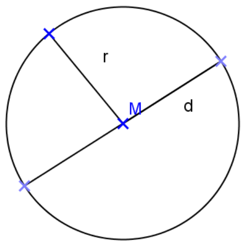


Zwei Halbgeraden [SA und [SB mit gleichem Anfangspunkt S schließen den Winkel ∢ASB ein. Die Halbgeraden nennt man **Schenkel**, den Anfangspunkt **Scheitelpunkt** des Winkels.
Winkel werden mit griechischen Buchstaben (α, β, γ ..) bezeichnet.
Die Winkeleinheit 1° ist der 360. Teil eines Vollwinkels.

Man unterscheidet noch

spitzer Winkel	$\alpha < 90°$
rechter Winkel	$\alpha = 90°$
stumpfer Winkel	$90° < \alpha < 180°$
gestreckter Winkel	$\alpha = 180°$
überstumpfer Winkel	$\alpha > 180°$

Kreis



Ein Kreis ist durch seinen **Mittelpunkt** M und seinen **Radius** r (Entfernung der Kreislinie vom Mittelpunkt) festgelegt.
Der Durchmesser d ist doppelt so lang wie der Radius.

Umfangs- und Flächenberechnungen

Für ein **Rechteck** mit der Länge *l* und der Breite *b* gilt:
Flächeninhalt $A = l \cdot b$; **Umfang** $u = 2 \cdot l + 2 \cdot b$
Für ein Quadrat mit der Seitenlänge *s* gilt:
$A = s \cdot s = s^2$; $u = 4 \cdot s$

Bsp.: $l = 7$ cm; $b = 4$ cm

$A = 7\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 28\text{ cm}^2$
$u = 2 \cdot 7\text{ cm} + 2 \cdot 4\text{ cm}$
$= 14\text{ cm} + 8\text{ cm} = 22\text{ cm}$

Oberflächenberechnung

Für einen **Quader** mit der Länge *l*, der Breite *b* und der Höhe *h* gilt:
Oberflächeninhalt $O = 2 \cdot l \cdot b + 2 \cdot l \cdot h + 2 \cdot b \cdot h$
Für einen Würfel mit der Kantenlänge *s* gilt:
$O = 6 \cdot s \cdot s = 6 \cdot s^2$

Bsp.: $l = 8$ cm; $b = 5$ cm; $h = 3$ cm

$O = 2 \cdot 8\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} + 2 \cdot 8\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}$
$+ 2 \cdot 5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}$
$= 80\text{ cm}^2 + 48\text{ cm}^2 + 30\text{ cm}^2 = 158\text{ cm}^2$