I. Funktionen

1. Direkt proportionale Zuordnungen

x und y sind **direkt proportional**, wenn

- zum n-fachen Wert für x der n-fache Wert für y gehört,
- die Wertepaare **quotientengleich** sind, d.h. es gilt: $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=m$ bzw. $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$,
- y = mx, wobei **m** der **Proportionalitätsfaktor** ist,
- die Punkte (x/y) auf einer **Ursprungsgeraden** liegen.

Beispiel:

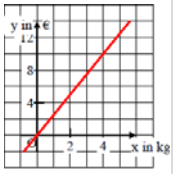
· 2 · 2,5

Apfelmasse in kg	1	2	3,5	5
Preis in €	2,50	5,00	8,75	12,50

· 2 · 2,5

$$m=\frac{2{,}50}{1}=\frac{5{,}00}{2}=\frac{8{,}75}{3{,}5}=\frac{12{,}50}{5}=2{,}50$$

Gleichung: $y=2{,}50\cdot x$



2. Indirekt proportionale Zuordnungen

x und y sind **indirekt proportional**, wenn

- zum n-fachen Wert für x der $\frac{1}{n}$-fache Wert für y gehört,
- die Wertepaare **produktgleich** sind, d.h. es gilt: $x_1\cdot y_1=x_2\cdot y_2=c$,
- $y=\frac{c}{x}$
- die Punkte (x/y) auf einer **Hyperbel** liegen.

Beispiel:

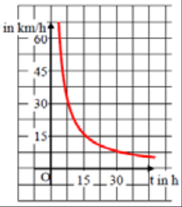
· 2 · 2,4

Zeit t in h	1,5	2,5	3	6
Geschwindigkeit v in $\frac{km}{h}$	160	96	80	40

: 2 : 2,4

$$c=1{,}5\cdot160=2{,}5\cdot96=3\cdot80=6\cdot40=240$$

Gleichung: $y=\frac{240}{x}$



3. Funktionen

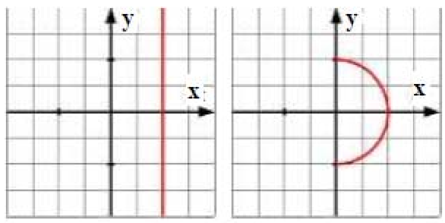
Eine Funktion f ist eine eindeutige Zuordnung. Sie ordnet jedem zulässigen x-Wert **genau** einen y-Wert zu.

Schreibweisen:

- Zuordnungsvorschrift: f: x ↦ y
- Funktionsgleichung: y = f(x)

Der von x abhängige Wert f(x) bzw. y heißt Funktionswert.

Kriterium, ob ein Graph einer Funktion vorliegt: Alle Parallelen zur y-Achse dürfen den Graphen höchstens einmal schneiden.



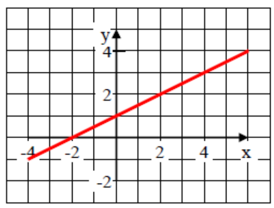
keine Funktionen

Die Menge aller zulässigen Werte von x heißt **Definitionsmenge.**

Die Menge aller Funktionswerte f(x) bzw. y heißt **Wertemenge.**

Eine Funktion kann beschrieben werden durch:

- einen Graphen,



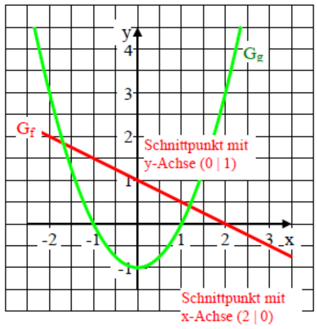
- eine Wertetabelle

x	-2	0	2	4
y	0	1	2	3

- eine Funktionsvorschrift/-gleichung: $f: x \mapsto 0{,}5x+1$ bzw. $f(x)=0{,}5x+1$

Schnittpunkte eines Funktionsgraphen G_f mit:

- der x-Achse (Nullstelle): **Setze f(x) = 0**
- der y-Achse: **Setze x = 0**
- einem weiteren Funktionsgraphen G_g: **Setze f(x) = g(x)**

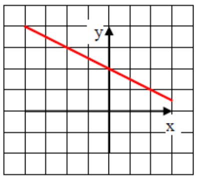


4. Lineare Funktionen

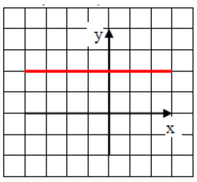
Die Gleichung einer linearen Funktion hat die Form:
y = m·x + t;
m: Steigung, t: y-Achsenabschnitt

Der Graph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**.

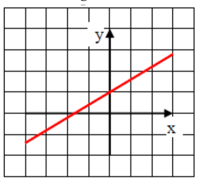
m < 0: fallende Gerade



m = 0: Parallele zur x-Achse

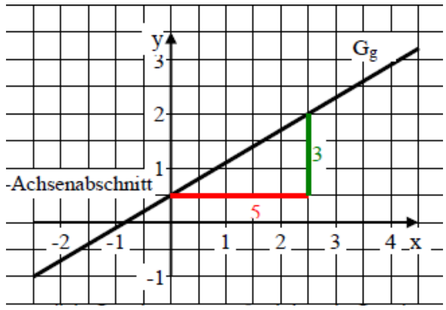


m > 0: steigende Gerade



Formel für die Steigung: $m = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

Beispiel: $f(x) = \frac{3}{5}x + 0{,}5$



Nullstelle: f(x) = 0 $\Leftrightarrow$ $\frac{3}{5}x + 0{,}5 = 0 \quad | -0{,}5$

$\frac{3}{5}x = -0{,}5 \quad | \cdot \frac{5}{3}$

$x = -\frac{5}{6}$

Beispiel:
Bestimme die Gleichung einer Geraden, die durch die zwei Punkten A(-1/2) und B(1/-3) geht.

- Steigung: $m = \dfrac{2-(-3)}{-1-1} = \dfrac{5}{-2} = -2{,}5$

  $\Rightarrow y = -2{,}5x + t$
- y-Achsenabschnitt: z.B. A einsetzen:

  $2 = -2{,}5 \cdot (-1) + t$

  $\Rightarrow t = -0{,}5$

  $\Rightarrow y = -2{,}5x - 0{,}5$

5. Lineare Ungleichungen

Beim Multiplizieren oder Dividieren einer Ungleichung mit einer negativen Zahl muss man das Ungleichheits-zeichen umdrehen. Ansonsten wie eine lineare Gleichung mithilfe von Äquivalenzumformungen lösen.

Beispiel: $G = \mathbb{Q}$

$-2x < 6 \quad |:(-2)$

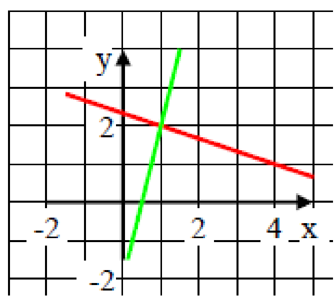
$x > -3$

$L =]-3, +\infty[$

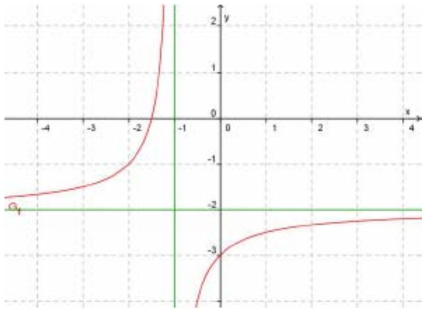
Intervallschreibweise:
[a ; b] : alle Zahlen von a bis b, a und b gehören dazu
]a ; b[: alle Zahlen zwischen a und b
(a und b gehören nicht dazu)
[a ; b[: a gehört dazu, b nicht
]a ; b]: a gehört nicht dazu, b gehört dazu

[3 ; 5]:	$3 \le x \le 5$	abgeschlossenes Intervall
]3 ; 5[:	$3 < x < 5$	offenes Intervall
[3 ; 5[:	$3 \le x < 5$	halboffenes Intervall
]3 ; 5]:	$3 < x \le 5$	halboffenes Intervall

6. Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten lässt sich stets auf die Form (I) $ax + by = e$ (II) $cx + dy = f$ bringen.	**Beispiel:** (I) $x + 3y = 7$ (II) $4x - y = 2$
Lösungsmethoden: <u>1. Einsetzungsverfahren</u> Löse eine Gleichung nach einer Variablen auf und setze dies in die andere Gleichung ein. <u>2. Additionsverfahren</u> Addiere geeignete Vielfache der Gleichungen, so dass eine Variable wegfällt. <u>3. Gleichsetzungsverfahren</u> Löse beide Gleichungen nach derselben Variablen auf und setze diese gleich. <u>4. Graphische Lösung</u> Zeichnet man die zugehörigen Geraden zu den Gleichungen, so sind die **Schnittpunkte Lösungen** des linearen Gleichungssystems.	 **Obiges Beispiel:** (II') $y = 4x - 2$ in (I) (I') $x + 3(4x - 2) = 7$ $x + 12x - 6 = 7$ $13x = 13$ $x = 1$ in (II') $y = 2$ $L = \{(1/2)\}$ **Obiges Beispiel:** (I) + 3 ·(II) $13x = 13$ $x = 1$ in (I) $y = 2$ $L = \{(1/2)\}$ **Obiges Beispiel:** (I') $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ (II') $y = 4x - 2$ $-\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} = 4x - 2$ $-4\frac{1}{3}x = -\frac{13}{3}$ $x = 1$ in (I') $y = 2$ $L = \{(1/2)\}$ 
Ein LGS kann ➢ genau eine Lösung (Schnittpunkt) ➢ keine Lösung (Geraden sind parallel) ➢ unendlich viele Lösungen (Geraden sind identisch) besitzen.	

7. Einfach gebrochen-rationale Funktion

Funktionen, deren Funktionsterm ein **Bruchterm** (Variable steht auch im Nenner) ist, nennt man **gebrochen-rationale Funktionen**.	**Beispiel:** ➢ $f(x)=\frac{1}{x}$ ➢ $g(x)=\frac{-1}{x-3}+2$
Alle Zahlen, für die der **Nenner Null** wird, gehören **nicht** zur Definitionsmenge. Eine Gerade, der sich der Graph einer Funktion f beliebig annähert, nennt man **Asymptote** des Funktionsgraphen G_f. Man unterscheidet **senkrechte** und **waagrechte Asymptoten.**	**Beispiel:** $f(x)=-\frac{1}{x+1}-2$ ➢ $D=\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$ ➢ Senkrechte Asymptote: x = –1 ➢ Waagrechte Asymptote: y = –2 

8. Rechnen mit Bruchtermen

Kürzen Aus Summen und Differenzen darf nicht gekürzt werden. Zähler und Nenner müssen vor dem Kürzen faktorisiert werden. Beim Kürzen werden Zähler und Nenner des Bruchterms durch denselben Term dividiert.	**Beispiel:** $\frac{3x-3}{x^2-x}=\frac{3(x-1)}{x(x-1)}=\frac{3}{x}$
Erweitern Beim Erweitern werden Zähler und Nenner des Bruchterms mit demselben Term multipliziert.	**Beispiel:** $\frac{2}{x}=\frac{2(3-x)}{x(3-x)}=\frac{6-2x}{3x-x^2}$
Addieren/Subtrahieren Alle Bruchterme werden durch Erweitern gleichnamig gemacht. Die Zähler werden addiert (subtrahiert) und die Nenner werden beibehalten.	**Beispiel:** $\frac{4}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{4(x+1)}{x(x+1)}+\frac{2x}{x(x+1)}=\frac{4x+4+2x}{x(x+1)}=\frac{6x+4}{x(x+1)}$
Multiplizieren Die Zähler werden multipliziert und die Nenner werden multipliziert.	**Beispiel:** $\frac{3x-6}{x}\cdot\frac{4x}{2-x}=\frac{(3x-6)\cdot 4x}{x\cdot(2-x)}=\frac{3(x-2)\cdot 4}{-(x-2)}=\frac{3\cdot 4}{-1}=-12$
Dividieren Der Dividend wird mit dem Kehrbruch des Divisors multipliziert.	**Beispiel:** $\frac{3-x}{x}:\frac{3-x}{1+x}=\frac{3-x}{x}\cdot\frac{1+x}{3-x}=\frac{(3-x)(1+x)}{x(3-x)}=\frac{1+x}{x}$

9. Bruchgleichungen

Vorgehen beim **Lösen** von Bruchgleichungen: ➢ Nenner faktorisieren ➢ Definitionsmenge bestimmen (keiner der Nenner darf Null sein!) ➢ die Bruchgleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren ➢ Kürzen ➢ bruchtermfreie Gleichung lösen ➢ überprüfen, ob die Lösung zur Definitionsmenge gehört ➢ Lösungsmenge angeben	**Beispiel:** $\frac{8}{2x(3x+2)}=\frac{2}{3x+2}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\left\{-\frac{2}{3};0\right\}$ **Hauptnenner:** $2x\cdot(3x+2)$ $\frac{8}{2x(3x+2)}=\frac{2}{3x+2} \quad \vert\ 2x\cdot(3x+2)$ $8=2\cdot 2x \quad \vert\ :4$ $x=2\in D$; L = {2}
Steht auf jeder Seite des Gleichheitszeichens nur genau ein Bruch, so kann man auch „über Kreuz" multiplizieren, um die bruchtermfreie Gleichung zu erhalten: $\frac{Z1}{N1}=\frac{Z2}{N2} \Rightarrow Z1\cdot N2=Z2\cdot N1$	**Beispiel:** $\frac{8}{2x(3x+2)}=\frac{2}{3x+2}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\left\{-\frac{2}{3};0\right\}$ $\frac{8}{2x(3x+2)}=\frac{2}{3x+2} \Rightarrow 8\cdot(3x+2)=2\cdot 2x(3x+2)$

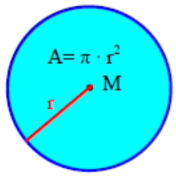
10. Potenzen

Für eine Potenz mit negativem Exponenten gilt: $x^{-n}=\frac{1}{x^n}; n\in\mathbb{Q}$	**Beispiele:** $5^{-1}=\frac{1}{5}$; $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$
Für alle $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ und $n,m\in\mathbb{Z}$ gilt: ➢ $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ ➢ $a^m:a^n=a^{m-n}$ ➢ $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$ ➢ $a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$ ➢ $a^n:b^n=(a:b)^n$ ➢ $a^0=1$	**Beispiele:** ➢ $x^{-2}\cdot x^5=x^{-2+5}=x^3$ ➢ $x^7:x^{-3}=x^{7-(-3)}=x^{10}$ ➢ $(x^3y^4)^{-2}=x^{-6}y^{-8}$ ➢ $2^{-3}\cdot a^{-3}=(2a)^{-3}=\frac{1}{8a^3}$ ➢ $2^{-3}:a^{-3}=\left(\frac{2}{a}\right)^{-3}=\frac{a^3}{8}$ ➢ $5^0=1$

II. Geometrie

1. Kreis (Umfang und Fläche)

- Die Kreiszahl $\pi = 3{,}14 \ldots$
- Der Kreisumfang $U = 2 \cdot \pi \cdot r$
  Der Umfang U und der Radius r sind direkt proportional zueinander.
- Der Kreisflächeninhalt $A = \pi \cdot r^2$



Beispiel:
Eine 1 € Münze hat einen Radius r = 1,16 cm.

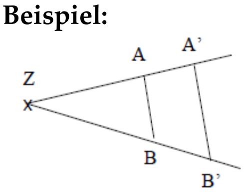
- Ihr Umfang: $U = 2 \cdot \pi \cdot 1{,}16\text{ cm} \approx 7{,}29\text{ cm}$
- Ihr Flächeninhalt: $A = \pi \cdot (1{,}16\text{ cm})^2 \approx 4{,}23\text{ cm}^2$

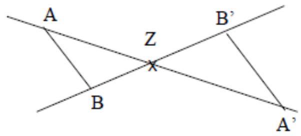
2. Strahlensatz

Werden zwei Geraden, die sich in einem Punkt Z schneiden, außerhalb von Z von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich

- je zwei Abschnitte auf der einen Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Gerade.
- die Abschnitte auf den Parallelen wie die Entfernungen ihrer Endpunkte von Z.

Beispiel:





(1) $\boxed{\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}}$ (2) $\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}}$ (gilt für V- und X-Figur).

3. Ähnlichkeit

Figuren F und G nennt man **zueinander ähnlich (F ~ G)**, wenn sie in allen Winkeln und in allen Verhältnissen entsprechender Seitenlängen übereinstimmen. Sie haben die gleiche Form und unterscheiden sich nur in der Größe. (Beispiel: Geodreieck fürs Heft und Geodreieck für die Tafel)

Für ähnliche Figuren gilt:

- Die Verhältnisse entsprechender Seiten sind gleich groß.
- Entsprechende Winkel sind gleich groß.
- Sind die Seitenlängen von G k-mal so groß wie die Seitenlängen von F, so ist der Flächeninhalt von G k^2-mal so groß wie der Flächeninhalt von F.

Dreiecke sind bereits dann **ähnlich,** wenn

- sie in zwei (und damit allen drei) Winkeln übereinstimmen (WW-Satz),
- sie im Verhältnis ihrer Seiten übereinstimmen (S:S:S-Satz),
- sie im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenem Winkel übereinstimmen (S:W:S-Satz),
- sie im Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen (S:s:W-Satz)

III. Wahrscheinlichkeit

1. Laplace-Experimente

Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A bei Laplace-Experimenten gilt: $P(A)=\frac{\text{Anzahl der Elemente von A}}{\text{Anzahl der Elemente von }\Omega}=\frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert}$ ➢ Bei der Durchführung eines Zufallsexperiments tritt genau ein Ergebnis ein. ➢ Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments heißt Ergebnisraum Ω. ➢ Die Anzahl der Elemente aus Ω wird mit $\lvert\Omega\rvert$ bezeichnet. ➢ Die einzelnen Ergebnisse bezeichnet man mit $\omega_1, \omega_2, \ldots$ ➢ Jede Teilmenge A der Ergebnisraum Ω eines Zufallsexperiments nennt man Ereignis.	**Beispiel:** Werfen eines sechsseitigen Würfels. ➢ Ergebnisraum Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}; $\lvert\Omega\rvert = 6$ ➢ Ereignis A = „Augenzahl ist größer als vier“ = {5 ; 6}; $\lvert A\rvert = 2$ ➢ Gegenereignis $\overline{A}$ = „Augenzahl ist kleiner oder gleich vier“ = {1 ; 2 ; 3 ; 4}

2. Das Zählprinzip

Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Anzahl der möglichen Ergebnisse, indem man die Anzahl der Möglichkeiten der einzelnen Stufen miteinander multipliziert. Möchte man *n* verschiedene Objekte in einer Reihe anordnen, so gibt es dafür n · (n - 1) · (n - 2) · ... · 2 · 1 = n! Möglichkeiten. (sprich: n Fakultät)	**Beispiel:** (1) Von A nach B führen 5 Wege, von B nach C 4 Wege und von C nach D 7 Wege. Es gibt 5 · 4 · 7 = 140 verschiedene Wege, um von A nach D zu gelangen. (2) 10 Personen stellen sich in einer Reihe für ein Gruppenfoto auf. Es gibt 10 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 10! = 3 628 800 verschiedene Möglichkeiten.