Grundwissen Mathematik Klasse 9

Reelle Zahlen:

- **Quadratwurzeln:** $\sqrt{a}$ ist die nicht-negative Lösung der Gleichung: $\underline{x^2 = a}$.

  Merke: a heißt Radikand und darf nicht negativ sein!

  Bsp.: $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$

- **Irrationale Zahlen:** Jede Zahl, die sich nicht als Bruch darstellen lässt, nennt man *irrationale Zahl*. Ihre Darstellung als Dezimalzahl ist weder abbrechend noch periodisch.

  Bsp.: $\sqrt{2}$, π

  Merke: Die Menge der rationalen Zahlen (ℚ) und die Menge der irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge ℝ der reellen Zahlen

- **Rechenregeln:** $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ **;** $a, b \in IR_0^+$

  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ **;** $a \in IR_0^+, b \in IR^+$

- **Potenzen mit rationalen Exponenten:** $\sqrt[n]{a}$ ist die nicht-negative Lösung der Gleichung $x^n = a$

- **Potenzgesetze:**

  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

  $a^n : a^m = a^{n-m}$

  $a^{-1} = \frac{1}{a}$

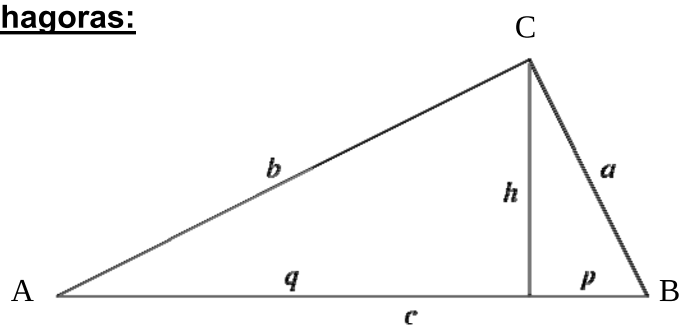
  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

  Bsp.: $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$

  $x^2 : x^3 = x^{2-3} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

  $\sqrt[2]{x^3} = x^{\frac{3}{2}} = x^{1,5}$

Satzgruppe des Pythagoras:

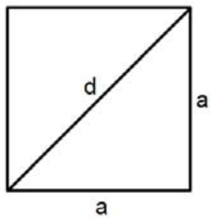


- **Satz des Pythagoras:** In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt:
  $\underline{a^2 + b^2 = c^2}$,
  mit a, b als Katheten und c als Hypotenuse.

- **Höhensatz:** $h^2 = p \cdot q$ **,** mit $p + q = c$
- **Kathetensätze:** $a^2 = c \cdot p$
  $b^2 = c \cdot q$

Anwendungsbsp.: *Diagonale im Quadrat*

$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$



Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck:

- **Definitionen:**

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$$

$$\cos\alpha = \frac{Ankathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Ankathete\ von\ \alpha}$$

- **Beziehungen:** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

- **Steigung einer Geraden:** $\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$

Binomische Formeln:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **Bsp.:** $(2x+3)^2 = 4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 9 = 4x^2 + 12x + 9$

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(3xy^3 - 5x^2)^2 = 9x^2y^6 - 30x^3y^3 + 25x^4$

3. $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ $\left(\frac{1}{3} + 4x\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - 4x\right) = \frac{1}{9} - 16x^2$

Quadratische Funktionen und Gleichungen:

- ***Normalform:*** $f(x) = ax^2 + bx + c$
- ***Scheitelform:*** $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$, mit $S(x_s / y_s)$ (Scheitel)
- ***Nullstellenform, Linearfaktorzerlegung:*** $f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, mit x_1, x_2 als ***Nullstellen*** der Funktion *f*
- **Lösungsformel („Mitternachtsformel“):** $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ***(Nullstellen)***

  Diskriminante: $D = b^2 - 4ac$

  $\Longrightarrow$ *D > 0 → zwei Lösungen (Nst.)*

  D = 0 → eine Lösung (doppelte Nst. ~ Scheitel)

  D < 0 → keine Lösung

- ***Scheitel:*** $x_s = \dfrac{-b}{2a}$, $y_s = f(x_s)$
- **Bsp.:** $f(x) = 2x^2 + 4x - 6 \;\rightarrow\; a = 2;\; b = 4;\; c = -6$

  Nst.: $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} \;\rightarrow\; x_1 = 1;\; x_2 = -3$

  Nullstellenform: $f(x) = 2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)$

  Scheitelform: $x_s = \dfrac{-4}{2 \cdot 2} = -1;\;\; f(-1) = -8 \;\rightarrow\; f(x) = 2 \cdot (x + 1)^2 - 8$

Zusammengesetzte Zufallsexperimente:

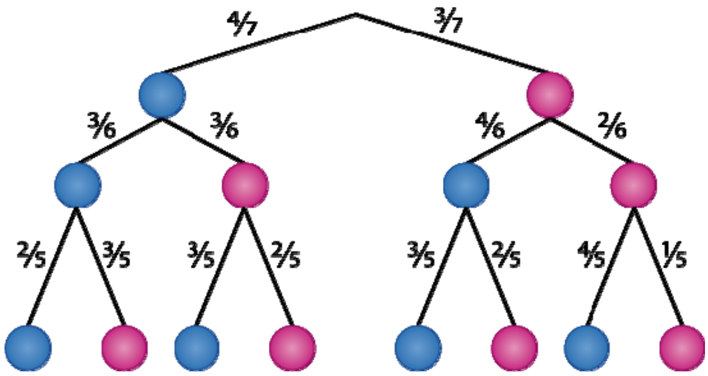
- **Pfadregeln**

  1. Pfadregel:
  Die Wahrscheinlichkeit eines **Ergebnisses** erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades multipliziert.

  2. Pfadregel:
  Die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses** erhält man als Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die zu diesem Ereignis führen.

Beispiel:
Nehmen wir an, in einer Urne befinden sich 7 Kugeln, 4 sind blau, die restlichen 3 rot. Es werden ohne Zurücklegen nacheinander 3 Kugeln gezogen.

Baumdiagramm:



a. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Kugeln blau sind?

$$P(\{bbb\}) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35} \approx 11{,}4\%$$

b. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den drei gezogenen Kugeln genau eine rote Kugel ist?

$$P(\{rbb, brb, bbr\}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{35} \approx 51{,}4\%$$

Geometrische Körper:

- **Prisma:** $O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot G + U \cdot h$ *(Oberfläche; M = Mantelfläche)*

  $V = G \cdot h$

- **Zylinder :** $O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot r^2 \pi + 2r\pi \cdot h$

  $V = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h$

- **Pyramide:** $V = \frac{1}{3} G \cdot h$

- **Kegel:** $M = r \cdot s \cdot \pi$ *(r = Radius der Grundfläche, s = Mantellinie)*

  $O = r^2 \pi + rs\pi$

  $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h$

<u>Übungsaufgaben mit Lösungen:</u>

1) **<u>Reelle Zahlen</u>**

Fasse folgende Terme zusammen und vereinfache:

1.1 $4\sqrt{x}+3\sqrt{16x}-5\sqrt{9x}$

1.2 $\sqrt{\frac{5x}{7y}}:\sqrt{\frac{45x^3}{28y^2}}$

2) <u>Pythagoras</u>

2.1 Von einem rechtwinkligen Dreieck $(\gamma=90^0)$ sind die Längen $b=12\ cm$ und $q=4\ cm$ bekannt. ***(Tipp: Planfigur)***

Berechne die fehlenden Größen a, c, p, h_c *und* A. Gib die Ergebnisse, falls nötig, in Wurzelschreibweise <u>und</u> auf eine Nachkommastelle gerundet an.

2.2 Eine Pyramide hat eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge $a=86m$, die Höhe der Pyramide beträgt $h=46m$.

a) Berechne die Länge der Seitenkante s. Runde das Endergebnis auf zwei Nachkommastellen!

b) Berechne die Mantelfläche der Pyramide.

2.3 Vereinfache den folgenden Term so weit wie möglich!

$$\frac{(\sin\alpha)^2-1}{(\cos\alpha)^3+\cos\alpha\cdot(\sin\alpha)^2}$$

3) <u>Binomische Formeln</u>

3.1 Multipliziere die Terme aus:

a) $(7a^3b+1{,}5b^2)^2$

b) $\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{2}{x}\right)^2$

c) $(2a+bc)\cdot(2a-bc)$

3.2 Verwandle den Term in ein Produkt: $0{,}25x^4-3x^2y+9y^2$

3.3 Ergänze die Lücken der Gleichung zu einer wahren Aussage:
$36k^2-18km^2+[\ \ ]=([\ \ ]-[\ \ ])^2$

4. Quadratische Gleichungen

4.1 Bestimme zur folgenden Funktion die Nullstellen und den Scheitel:

$$f(x) = -0{,}25x^2 - \frac{11}{8}x + 5$$

4.2 Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichung: $-\frac{1}{2}x(6-1{,}5x) = 0$

5. Zusammengesetzte Zufallsexperimente

Barbara und Tom schießen mit Pfeil und Bogen gleichzeitig einmal auf dasselbe Ziel.

Barbara trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{9}$ und Tom mit $0{,}3$.

a) Fertige zu diesem Zufallsexperiment ein geeignetes Baumdiagramm mit vollständiger Beschriftung und gib alle Spielausgänge an!

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ziel mindestens einmal getroffen wird?

6. Geometrische Körper

Ein pyramidenförmiger Trichter mit einer Höhe von $16cm$ ist bis zur Hälfte mit einer Flüssigkeit gefüllt. Seine quadratische Öffnung hat eine Grundkantenlänge von $8cm$.

a) Berechne die Länge der Seitenkante der Pyramide!

b) Bestimme den Winkel an der Pyramidenspitze, den zwei gegenüberliegende Seitenflächen einschließen!

c) Berechne das Volumen der eingefüllten Flüssigkeit!

Lösungen:

1.1 $4\sqrt{x} + 12\sqrt{x} - 15\sqrt{x} = \sqrt{x}$

1.2 $\sqrt{\frac{5x}{7y} : \frac{45x^3}{28y^2}} = \sqrt{\frac{5x \cdot 28y^2}{7y \cdot 45x^3}} = \sqrt{\frac{4y}{9x^2}} = \frac{2}{3x}\sqrt{y}$

2.1 $h_c^2 = 12^2 - 4^2 \Rightarrow h_c = \sqrt{144-16} = 8\sqrt{2}[cm]$

$p = \frac{h_c^2}{q} \Rightarrow p = \frac{128}{4} = 32[cm]$ $\qquad c = 32 + 4 = 36[cm]$

$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{36^2 - 12^2} = 24\sqrt{2}[cm]$

$A = h_c \cdot c = 8\sqrt{2} \cdot 36 \approx 407{,}3[cm^2]$ oder $A = a \cdot b = 24\sqrt{2} \cdot 12 \approx 407{,}3[cm^2]$

2.2 a) $s^2 = h^2 + \left(0{,}5a\sqrt{2}\right)^2$ (Diagonale im Quadrat: $d = a\sqrt{2}$)

$\Rightarrow s = \sqrt{46^2 + (0{,}5 \cdot 86\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{646} \approx 76{,}25[m]$

b) $M = 4 \cdot A_\Delta = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 86 \cdot \sqrt{h^2 + (0{,}5a)^2} = 172\sqrt{46^2 + 43^2} \approx 10830{,}54\left[m^2\right]$

2.3 $T(\alpha) = \frac{\sin^2\alpha - \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)}{\cos\alpha \cdot \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)} = \frac{-\cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot 1} = -\cos\alpha$

3.1 a) $49a^6b^2 + 21a^3b^3 + 2{,}25b^4$

b) $\frac{9}{16}x^8 - 3x^3 + \frac{4}{x^2}$

c) $4a^2 - b^2c^2$

3.2 $\left(0{,}5x^2 - 3y\right)^2$

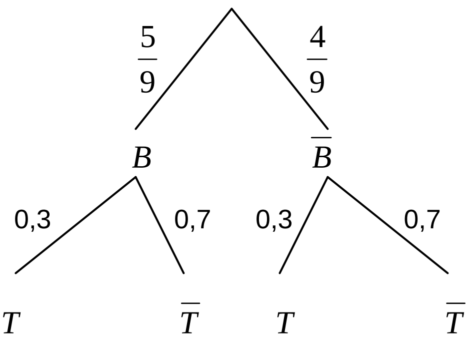
3.3 $36k^2 - 18km^2 + 2{,}25m^4 = \left(6k - 1{,}5m^2\right)^2$

4.1 Nst.: $x_1 = 2{,}5 \quad x_2 = -8$

Scheitel: $S\left(-2{,}75 / \frac{441}{64}\right)$

4.2 $x_1 = 0 \quad x_2 = 4$

5a)



$\Omega = \left\{BT, B\overline{T}, \overline{B}T, \overline{B}\overline{T}\right\}$

5b) $P(E) = 1 - P\left(\overline{B}\overline{T}\right) = 1 - \frac{4}{9} \cdot 0{,}7 = \frac{31}{45} \approx 69\%$

6a) $s = \sqrt{256 + 32} = 12\sqrt{2}$

6b) $\tan\alpha' = \frac{4}{16} \Rightarrow \alpha' \approx 14{,}04° \Rightarrow \alpha = 2 \cdot \alpha' \approx 28°$

6c) $V = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 8 = 42\frac{2}{3}$