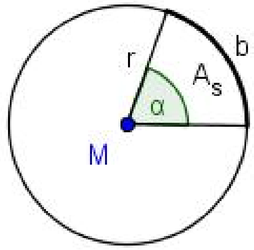
I. Kreiszahl π

1. Kreis:



Fläche des Kreissektors: $A_S = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi$

Länge des Kreisbogens: $b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2r \cdot \pi$

Im Einheitskreis gilt: $\frac{b}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°} \Leftrightarrow b = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi$

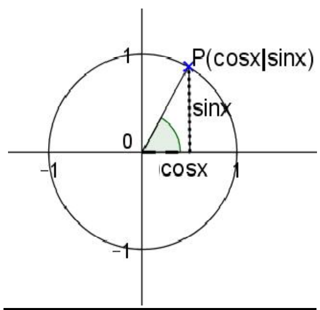
2. Kugel:

Oberflächeninhalt: $O = 4r^2\pi$

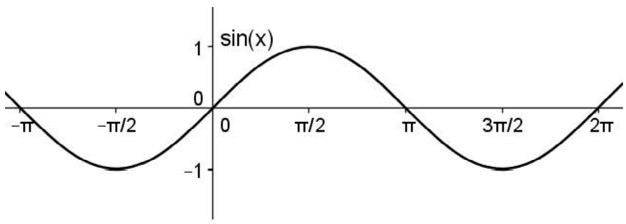
Volumen: $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$

II. Geometrische und funktionale Aspekte der Trigonometrie

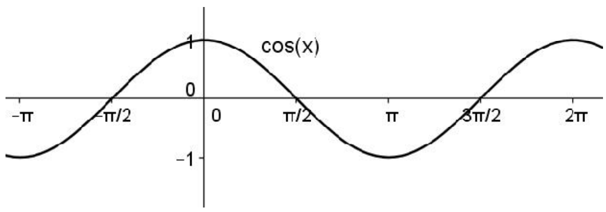
Sinus und Kosinus am Einheitskreis



Sinusfunktion



Kosinusfunktion



Eigenschaften

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$
$$\mathbb{W} = [-1; 1]$$

Nullstellen:

$$sinx = 0 \Leftrightarrow x_k = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$cosx = 0 \Leftrightarrow x_k = \frac{2k+1}{2} \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

Sinus- und Kosinuskurve sind periodisch mit Periode 2π:

$$sinx = \sin(x + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$cosx = \cos(x + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Punktsymmetrisch zum Ursprung:

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Achsensymmetrisch zur y-Achse:

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

Die allgemeine Sinusfunktion

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d = a \cdot \sin\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right] + d\,, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad a \neq 0, \quad b > 0$$

$|a|$: Amplitude; für $a < 0$ kommt eine Spiegelung an der x-Achse hinzu

$\frac{2\pi}{b}$: Periode

$c > 0\ (c < 0)$: Verschiebung der Sinuskurve in x-Richtung nach links (rechts) um $\frac{c}{b}$

$d > 0\ (d < 0)$: Verschiebung der Sinuskurve in y-Richtung nach oben (unten) um d

III. Exponentielles Wachstum und Logarithmen

Lineares Wachstum

Ein Wachstum mit *konstantem Zuwachs* in gleichen Schritten nennt man lineares Wachstum.

Exponentielles Wachstum

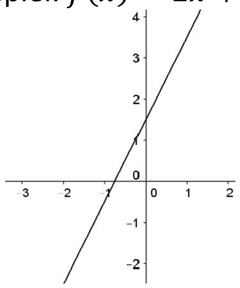
Ein Wachstum mit *konstantem Wachstumsfaktor* in gleichen Schritten nennt man exponentielles Wachstum.

Funktionsgleichung

$$f(x) = mx + t$$

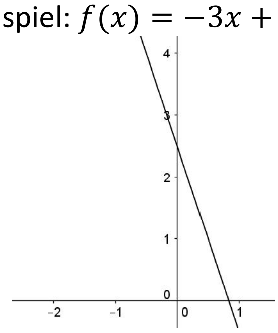
$m > 0$: lineare Zunahme

Beispiel: $f(x) = 2x + 1{,}5$



$m < 0$: lineare Abnahme

Beispiel: $f(x) = -3x + 2{,}5$

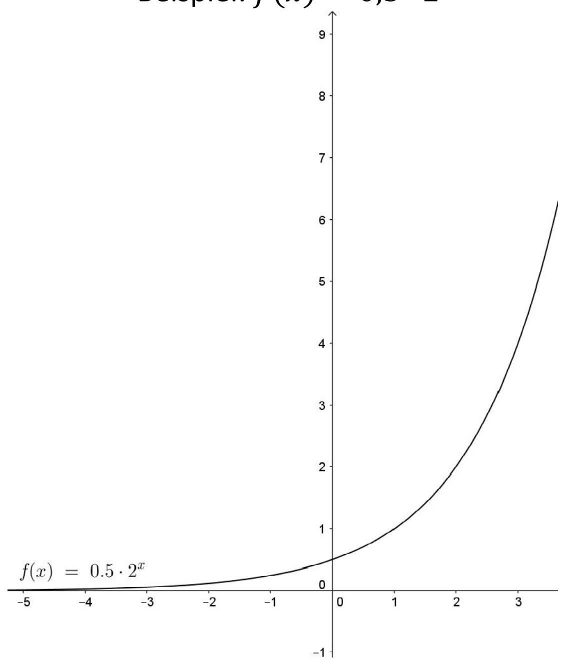


$$f(x) = b \cdot a^x$$

b = Anfangswert ($f(0) = b$)

a = Wachstumsfaktor ($a > 0$)

Beispiel: $f(x) = 0{,}5 \cdot 2^x$



Logarithmus von b zur Basis a: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Gesetze für das Rechnen mit Logarithmen (für $u > 0, v > 0, a > 0, a \neq 1$):

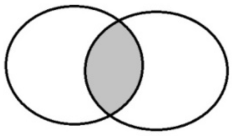
1) $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
2) $\log_a(u : v) = \log_a u - \log_a v$
3) $\log_a u^x = x \cdot \log_a u$

Umrechnungsformel: $\log_a u = \frac{\lg u}{lg a}$

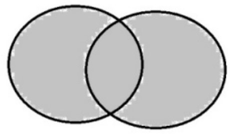
IV. Zusammengesetzte Zufallsexperimente

Mengendiagramme

Schnittmenge: $A \cap B$



Vereinigungsmenge: $A \cup B$



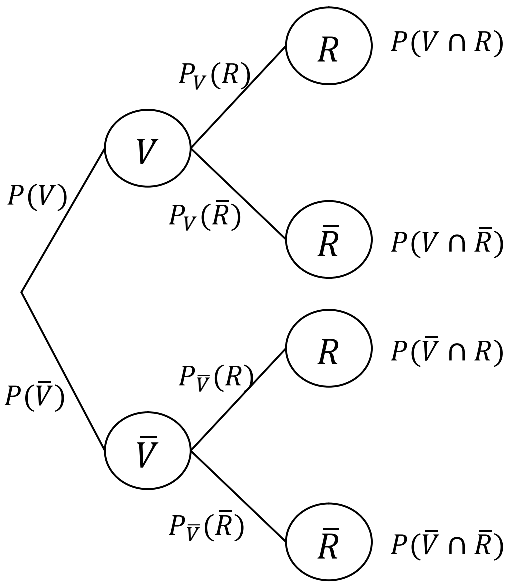
Vierfeldertafel

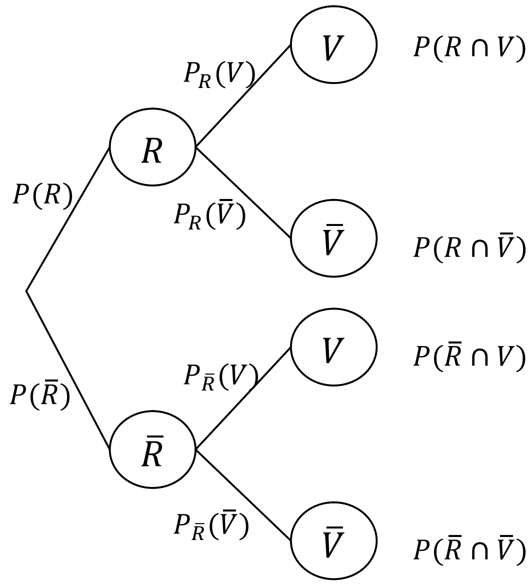
Für zwei Ereignisse V und R:

	R	$\bar{R}$	
V	$\lvert V \cap R \rvert$	$\lvert V \cap \bar{R} \rvert$	$\lvert V \rvert$
$\bar{V}$	$\lvert \bar{V} \cap R \rvert$	$\lvert \bar{V} \cap \bar{R} \rvert$	$\lvert \bar{V} \rvert$
	$\lvert R \rvert$	$\lvert \bar{R} \rvert$	$\lvert \Omega \rvert$

Baumdiagramme

Für zwei Ereignisse V und R – analog zu obiger Vierfeldertafel





Bedingte Wahrscheinlichkeit

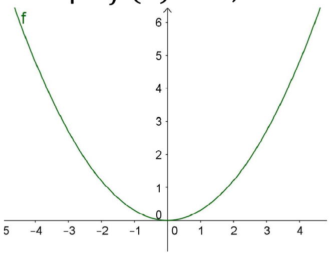
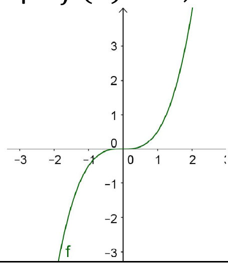
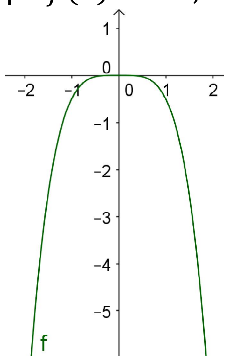
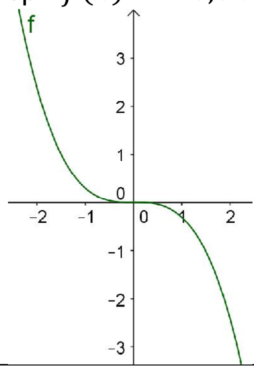
Sind A und B Ereignisse eines Zufallsexperiments mit $P(A) \neq 0$, so versteht man unter der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von B unter der Bedingungen des Eintretens von A.

Es gilt: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

V. Ausbau der Funktionenlehre

1. Graphen ganzrationaler Funktionen

Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

	n gerade	n ungerade
$a_n > 0$	Bsp.: $f(x) = 0{,}3x^2$ 	Bsp.: $f(x) = 0{,}5x^3$ 
Charakteristischer Verlauf	„von links oben, nach rechts oben“	„von links unten, nach rechts oben“
$a_n < 0$	Bsp.: $f(x) = -0{,}5x^4$ 	Bsp.: $f(x) = -0{,}3x^3$ 
Charakteristischer Verlauf	„von links unten, nach rechts unten“	„von links oben, nach rechts unten“

Ganzrationale Funktionen und ihre Nullstellen

Funktionen der Form $f: f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ nennt man *ganzrationale Funktionen n-ten Grades*.

Charakteristischer Verlauf

Das Verhalten einer ganzrationalen Funktion wird für betragsmäßig große x-Werte durch den Summanden mit dem höchsten vorkommenden Exponenten bestimmt. (vgl. Tabelle unter *„Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten“*)

Charakteristische Punkte

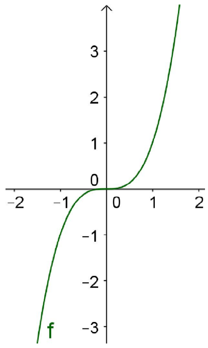
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = y \ \rightarrow S_y(0|y)$

Nullstellen: Lösen der Gleichung: $f(x) = 0$

Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen. Eine Funktion besitzt eine k-fache Nullstelle bei $x = a$, wenn der Linearfaktor $x - a$ in vollständig faktorisierter Form des Funktionsterms k-mal vorkommt.

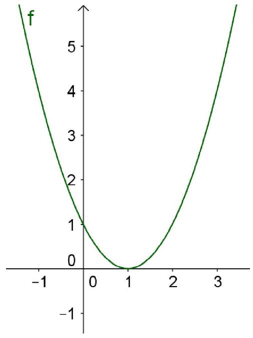
Nullstelle ungerader Ordnung:
Vorzeichenwechsel

Beispiel: $f(x) = x^3$
Nullstelle $x = 0$ mit Ordnung 3



Nullstelle gerader Ordnung:
kein Vorzeichenwechsel

Beispiel: $f(x) = (x-1)^2$
Nullstelle $x = 1$ mit Ordnung 2



2. Vertiefen der Funktionenlehre

Überblick über Funktionstypen

- Lineare Funktionen (vgl. Grundwissen 8. Klasse)
- Quadratische Funktionen (vgl. Grundwissen 9. Klasse)
- Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten
- Ganzrationale Funktionen
- Einfach gebrochen-rationale Funktionen (vgl. Grundwissen 8. Klasse)
- Trigonometrische Funktionen
- Exponentialfunktionen

Eigenschaften ausgewählter Graphen

- Definitionsmenge
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
- Symmetrieverhalten
  - Achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn $f(-x) = f(x)$ gilt
  - Punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt
- Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs:

Grenzwerte
Kommen die Funktionswerte f(x) einer Funktion f für beliebig groß werdende x-Werte einer Zahl a beliebig nahe, so nennt man a den Grenzwert der Funktion f für x gegen plus unendlich.
Schreibweise: $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$

- Steigungsverhalten und Extrempunkte
- Wertemenge

Parameter verändern Funktionsgraphen

Verschiebungen:

$$g(x) = f(x + a) + b$$

Der Graph G_g entsteht aus dem Graphen von G_f durch Verschiebung um – a in x-Richtung und um b in y-Richtung

Strecken von Funktionsgraphen

$$g(x) = cf(x)$$

Streckung für $|c| > 1$ (Stauchung für $0 < |c| < 1$) in y-Richtung

$$g(x) = f(dx)$$

Streckung für $0 < |d| < 1$ (Stauchung für $|d| > 1$) in x-Richtung

Spezialfälle: Spiegelungen

$$g(x) = cf(x)$$

Zusätzlich Spiegelung an der x-Achse für $c < 0$

$$g(x) = f(dx)$$

Zusätzlich Spiegelung an der y-Achse für $d < 0$