

## Aufgaben zum Grundwissen Mathematik 11. Jahrgangstufe – Teil 1

- Diese Aufgaben zeigen, welche grundlegenden Fertigkeiten die Schülerinnen und Schüler in diesem Lehrplanabschnitt erlernen müssen. Diese Aufgaben sollten die Schülerinnen und Schüler also sicher lösen können. Da viele Abituraufgaben komplexer sind und einzelne Aufgabentypen vernetzen, garantiert das Beherrschen dieser Aufgaben jedoch noch keine gute oder sehr gute Abiturnote.
- Lehrplan: M 11.1.1 Graphen gebrochen-rationaler Funktionen  
M 11.1.2 Lokales Differenzieren
- Passende Kapitel im Schulbuch Fokus Mathematik 11: 1.1 und 1.2

### 1. Eigenschaften gebrochen-rationaler Funktionen

Wandele die folgenden Terme zuerst in die faktorisierte Form um (siehe Beispiel) und gib dann  $D_f$ , die Nullstellen NS sowie den Grenzwert (GW)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  an!

Umformungen	$D_f$	NS	GW
$f(x) = x - 2 + \frac{2}{x+1} = \frac{(x-2)(x+1)+2}{x+1} = \frac{x^2-x}{x+1} = \frac{x(x-1)}{x+1}$	$R \setminus \{-1\}$	$x_1 = 0   x_2 = 1$	$\infty$
$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4} =$			
$f(x) = x - \frac{x^2 - 1}{x + 2} =$			

### 2. Funktionsterme gebrochen-rationaler Funktionen finden

Gib einen (möglichst einfachen) Funktionsterm an, so dass der Graph  $G_f$  der Funktion die folgenden Eigenschaften aufweist.

- Doppelte NS bei  $x = 2$ , Polstelle mit VZW bei  $x = 3$  sowie  $f(0) = 1$ .
- Keine NS, Polstelle ohne VZW bei  $x = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ .
- Asymptoten von  $G_f$  sind:  $x = 2 \mid x = 3 \mid y = 0$ , keine NS.
- Die einzige Definitionslücke bei  $x = -2$  ist hebbar.

### 3. Grenzwert berechnen

Zeige durch Faktorisieren und mit der  $h$ -Methode, dass folgender Grenzwert gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{x^3 - 2x^2}{2x^2 - 8} = \frac{1}{2}$$

### 4. Asymptoten

Gib alle Asymptoten von  $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+8x}$  und  $g(x) = \frac{x^2-1}{x^3+8x}$  an.

### 5. Sekante und Tangentensteigung

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit dem Funktionsterm  $f(x) = 2x^2 - x + 1$ .

- Berechne die mittlere Steigung des Graphen zwischen  $x = 1$  und  $x = 2$ .
- Gib einen Term der Sekante an, die  $G_f$  bei  $x = 1$  und  $x = 2$  schneidet.
- Berechne mit der  $h$ -Methode die Steigung von  $G_f$  an der Stelle  $x = 1$ .

## Aufgaben zum Grundwissen Mathematik 11. Jahrgangstufe – Teil 2

- Diese Aufgaben zeigen, welche grundlegenden Fertigkeiten die Schülerinnen und Schüler in diesem Lehrplanabschnitt erlernen müssen. Diese Aufgaben sollten die Schülerinnen und Schüler also sicher lösen können. Da viele Abituraufgaben komplexer sind und einzelne Aufgabentypen vernetzen, garantiert das Beherrschen dieser Aufgaben jedoch noch keine gute oder sehr gute Abiturnote.
- Lehrplan: M 11.1.3 Globales Differenzieren  
M 11.1.4 Anwendung der ersten Ableitung
- Passende Kapitel im Schulbuch Fokus Mathematik 11: 2, 3 und 5.1

### 1. Ableiten mit Summen-, Produkt- und Quotientenregel

Differenziere die folgenden Funktionen:

- a)  $f(x) = x^2 \cdot (x + 2)$
- b)  $f(x) = 3x^3 + 2x - 4$
- c)  $f(x) = (x + 1)(3x^2 + 1)$
- d)  $f(x) = (x^4 - 5x^3) \cdot (2x - 3)$
- e)  $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$
- f)  $f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x^2+1}$

### 2. Gebrochen-rationale Funktionen untersuchen

Betrachtet werden die Funktionen mit  $f(x) = \frac{4x}{x^2-4}$  und  $g(x) = \frac{x^3+1}{x^2+x+4}$ .

- a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich der Funktionen und untersuche sie auf Symmetrie.
- b) Untersuche  $f$  an den Rändern ihres Definitionsbereichs und gib alle Asymptoten an.
- c) Bestimme die Extrempunkte von  $G_f$ .

### 3. Stammfunktion

Ermitteln Sie den Term derjenigen Stammfunktion  $F(x)$  von  $f(x) = x^2 - x^3 + 1$ , die durch den Punkt  $P(1|1)$  geht. Wie groß ist die Steigung der Funktion  $f$  im Punkt  $P(1|1)$ , wie groß die Steigung der Stammfunktion  $F$  im Punkt  $P(1|1)$ ?

### 4. Extrema und Kurvendiskussion

Gegeben ist die ganzrationale Funktion  $f: x \mapsto -\frac{3}{2}x^4 + 10x^3 - 18x^2 + 4$  mit  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Bestimme das Verhalten des Graphen von  $f$  an den Rändern des Definitionsbereiches.
- b) Untersuche die Funktion auf Symmetrie.
- c) Bestimme das Monotonieverhalten sowie Lage und Art der Extrema des Graphen von  $f$ .
- d) Die Steigung der Funktion  $f$  an der Stelle  $x = 1$  soll durch eine Sekante durch die Punkte  $A(1|?)$  und  $B(2|-12)$  abgeschätzt werden. Berechne Steigung und Geradengleichung der Sekante.

## Aufgaben zum Grundwissen Mathematik 11. Jahrgangstufe – Teil 3

- Diese Aufgaben zeigen, welche grundlegenden Fertigkeiten die Schülerinnen und Schüler in diesem Lehrplanabschnitt erlernen müssen. Diese Aufgaben sollten die Schülerinnen und Schüler also sicher lösen können. Da viele Abituraufgaben komplexer sind und einzelne Aufgabentypen vernetzen, garantiert das Beherrschen dieser Aufgaben jedoch noch keine gute oder sehr gute Abiturnote.
- Lehrplan: M 11.3 Weitere Ableitungsregeln
- Passende Kapitel im Schulbuch Fokus Mathematik 11: 5.1 und 5.2

### 1. Wurzelfunktionen und verkettete Funktionen ableiten

Differenziere die folgenden Funktionen:

- a)  $f(x) = \sqrt{3x - 1}$
- b)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 2}$
- c)  $f(x) = \sqrt{\cos x}$
- d)  $f(x) = \sin(x^2 + 2) + 3x$
- e)  $f(x) = (2x^2 + 1)^{100}$
- f)  $f(x) = \sin(\cos x)$
- g)  $f(x) = \frac{1}{2-x}$

### 2. Wurzelfunktionen untersuchen

Gegeben sei die Funktion  $f(x) = \sqrt{x - 3} + 3$

- a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich von  $f$  und gib die Nullstellen an.
- b) Berechne den Neigungswinkel der Tangente an der Stelle  $x = 2$ .
- c) Wie lautet die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  zur Funktion  $f$ ? Gib den Funktionsterm sowie die Werte- und Definitionsmenge von  $f^{-1}$  an.

### 3. Umkehrfunktion

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = -2\sqrt{x} + 1$ .

- a) Bestimme die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion  $f(x)$ .
- b) Bestimme die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  zur Funktion  $f(x)$  und gib deren Definitionsmenge und Wertemenge an.

### 4. Sinusfunktion untersuchen

Gegeben ist die Kurvenschar  $f(x) = a \cdot \sin x + bx$  ( $D_f = \mathbb{R}$ )

- a) Untersuche die Scharkurven auf Symmetrie bzgl. des Koordinatensystems.
- b) Bestimme  $a$  und  $b$  so, dass bei  $x = 0,75 \pi$  eine waagrechte Tangente und dass bei  $x = 0,25 \pi$  eine Tangente mit der Steigung  $\sqrt{2}$  entsteht.

Im Folgenden wird die Funktion  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sqrt{2}x$  mit  $D_f = [0 | 2\pi]$  betrachtet.

- c) Bestimme die Extrempunkte des Graphen  $G_f$ .

## Aufgaben zum Grundwissen Mathematik 11. Jahrgangstufe – Teil 4

- Diese Aufgaben zeigen, welche grundlegenden Fertigkeiten die Schülerinnen und Schüler in diesem Lehrplanabschnitt erlernen müssen. Diese Aufgaben sollten die Schülerinnen und Schüler also sicher lösen können. Da viele Abituraufgaben komplexer sind und einzelne Aufgabentypen vernetzen, garantiert das Beherrschen dieser Aufgaben jedoch noch keine gute oder sehr gute Abiturnote.
- Lehrplan: M 11.4 Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion
- Passende Kapitel im Schulbuch Fokus Mathematik 11: 6.1 und 6.3

### 1. *e*-Funktion ableiten

Differenziere die folgenden Funktionen und bestimme die Nullstellen der Ableitungsfunktion:

- $f(x) = e^x - x$
- $f(x) = e^{5x-3}$
- $f(x) = e^{x \cdot \sin x}$
- $f(x) = 5 \cdot 2^{-x}$
- $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{x+1}}$

### 2. *ln*-Funktion ableiten

Differenziere die folgenden Funktionen und bestimme die Definitionsmenge:

- $f(x) = \ln(4x + 8)$
- $f(x) = \ln(-x)$
- $f(x) = (x - e) \ln x$
- $f(x) = e^{2x} \cdot \ln(x + 2)$
- $f(x) = \ln \frac{4x-2}{x+3}$

### 3. Kurvendiskussion einer *e*-Funktion

Untersuche die Funktion  $f(x) = (x + 2) \cdot e^{1-x}$  auf Symmetrie, Nullstellen, Extrema und Verhalten im Unendlichen.

### 4. Kurvendiskussion einer *ln*-Funktion

Untersuche die Funktion  $f(x) = (1 - x) \cdot \ln(3 - x)$  auf Symmetrie, Nullstellen und das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs. Bestimme die Gleichung der Tangenten an den Graphen an der Stelle  $x = 2$ .

## Aufgaben zum Grundwissen Mathematik 11. Jahrgangstufe – Teil 5

- Diese Aufgaben zeigen, welche grundlegenden Fertigkeiten die Schülerinnen und Schüler in diesem Lehrplanabschnitt erlernen müssen. Diese Aufgaben sollten die Schülerinnen und Schüler also sicher lösen können. Da viele Abituraufgaben komplexer sind und einzelne Aufgabentypen vernetzen, garantiert das Beherrschen dieser Aufgaben jedoch noch keine gute oder sehr gute Abiturnote.
- Lehrplan: M 11.6 Anwendungen der Differentialrechnung
- Passende Kapitel im Schulbuch Fokus Mathematik 11: 8.1 und 8.2

### 1. Funktionsterme mit vorgegebenen Eigenschaften

Bestimme den Term einer möglichst einfachen ganzrationalen Funktion, deren Graph durch den Punkt  $A(1|3)$  verläuft, die bei  $x = -2$  eine Nullstelle besitzt und deren Tangente an der Stelle  $x = 0$  die Steigung 2 hat.

### 2. Funktionsterme bestimmen

Bestimme mit dem Ansatz  $f(x) = (x + a)e^{bx}$  den Term einer Funktion, die die  $y$ -Achse bei  $y = 2$  mit Steigung 4 schneidet.

### 3. Geometrische Optimierung

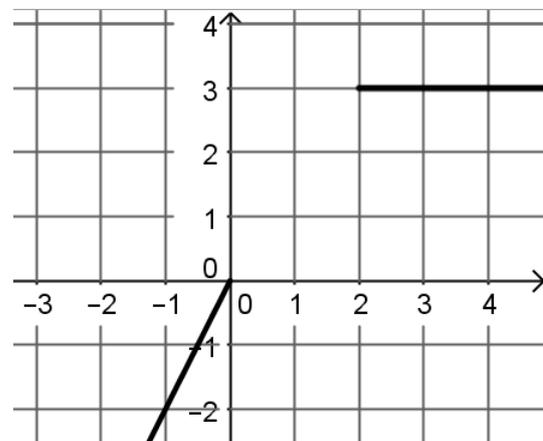
Ein Rechteck hat den Flächeninhalt  $F = 100[FE]$ , eine Seitenlänge wird mit  $b$  bezeichnet.

- a) Zeige, dass man den Umfang mit dem Term  $f(b) = 2b + \frac{200}{b}$  beschreiben kann.
- b) Finde den Wert für  $b$ , bei dem der Umfang minimal wird und deute das Ergebnis.

### 4. Kurven einpassen

Die beiden Streckenstücke sollen mit einer ganzrationalen Funktion verbunden werden.

- a) Welche Bedingungen muss die Funktion erfüllen?
- b) Welchen Grad muss die Funktion somit mindestens haben?
- c) Bestimme den Funktionsterm.

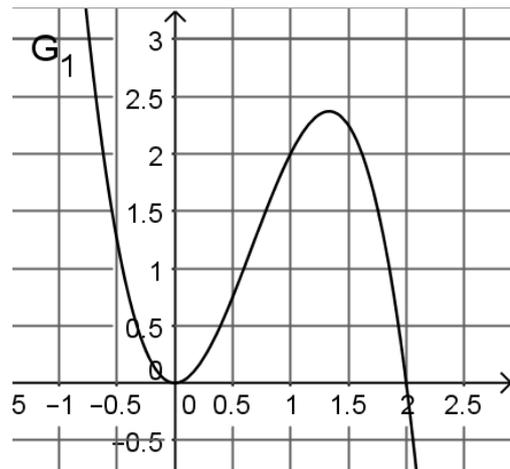


## Aufgaben zum Grundwissen Mathematik 12. Jahrgangstufe – Teil 6

- Diese Aufgaben zeigen, welche grundlegenden Fertigkeiten die Schülerinnen und Schüler in diesem Lehrplanabschnitt erlernen müssen. Diese Aufgaben sollten die Schülerinnen und Schüler also sicher lösen können. Da viele Abituraufgaben komplexer sind und einzelne Aufgabentypen vernetzen, garantiert das Beherrschen dieser Aufgaben jedoch noch keine gute oder sehr gute Abiturnote.
- Lehrplan: M 12.1.1 Flächeninhalt und bestimmtes Integral
- Passende Kapitel im Schulbuch Fokus Mathematik 12: 2.1 bis 2.3

### 1. Graphische Bestimmung von Flächeninhalten

Schätze die Fläche unter dem nebenstehenden Funktionsgraphen  $G_1$  zwischen den beiden Nullstellen ab.



### 2. Hauptsatz der Differentialrechnung

Zeige, dass die Funktion  $F(x) = \frac{x^3+x^2-2}{x+3}$  eine Stammfunktion zu  $f(x) = \frac{2x^3+10x^2+6x+2}{x^2+6x+9}$  ist und berechne das bestimmte Integral  $\int_0^1 f(x) dx$ .

### 3. Flächeninhalte zwischen Graphen, Achsen, ...

Skizziere die Graphen zu den Funktionen mit  $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)x^2$  und  $g(x) = \frac{1}{2}(x^2-4)$  und berechne

- den Inhalt  $A_1$  der Fläche, die vom Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse eingeschlossen wird;
- den Inhalt  $A_2$  der Fläche zwischen den Graphen von  $f$  und  $g$ ;
- $A_3 = \int_1^{2,5} f(x) dx$  und deute das Vorzeichen des Integralwertes;
- den Inhalt  $A_4$  der Fläche, die von der Tangente an  $g$  im Punkt  $(-3|2,5)$ , der  $x$ -Achse und dem Graphen von  $g$  eingeschlossen wird;
- b so, dass  $\int_0^b g(x) dx = 0$  und deute die Ergebnisse.

### 4. Berechnen von bestimmten Integralen

Berechne:

- $\int_{-\pi}^0 (\sin x - \frac{1}{2}x) dx$
- $\int_1^2 \sqrt{3x-2} dx$
- $\int_{-2}^{-1} \frac{x^3+x+2}{x^2} dx$
- $\int_0^4 (4\sqrt[3]{x} - 5) dx$
- $\int_0^1 4x \cdot e^{x^2} dx$

## Aufgaben zum Grundwissen Mathematik 12. Jahrgangstufe – Teil 7

- Diese Aufgaben zeigen, welche grundlegenden Fertigkeiten die Schülerinnen und Schüler in diesem Lehrplanabschnitt erlernen müssen. Diese Aufgaben sollten die Schülerinnen und Schüler also sicher lösen können. Da viele Abituraufgaben komplexer sind und einzelne Aufgabentypen vernetzen, garantiert das Beherrschen dieser Aufgaben jedoch noch keine gute oder sehr gute Abiturnote.
- Lehrplan: M 12.1.2 Weitere Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen
- Passende Kapitel im Schulbuch Fokus Mathematik 12: 4.1 und 4.2

### 1. Erste und zweite Ableitung

Bestimmen Sie jeweils  $f'(x)$  und  $f''(x)$ !

a)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{x}$

b)  $f(x) = x \cdot e^{-x}$

### 2. Krümmung und Wendepunkte

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{2\ln(x)+1}{x^2}$ . Ermitteln Sie Nullstellen, Art und Lage von Extrempunkten und Wendepunkten (vgl. Skizze).

[Zur Kontrolle:  $f'(x) = \frac{-4\ln x}{x^3}$ ]

### 3. Wendepunkt einer Funktionenschar

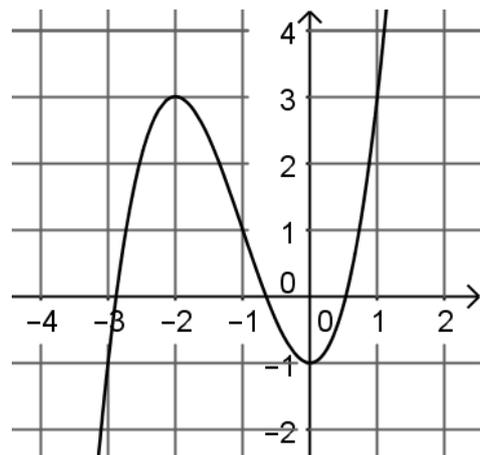
Gegeben ist die Funktionenschar  $g_k(x) = \frac{4-kx}{x^2}$  mit  $k \in \mathbb{R}$ .

- Für welche  $k$  gibt es keine Wendepunkte?
- Bestimme die Lage des Wendepunktes in Abhängigkeit von  $k$ .
- Bestimme für  $k = 6$  die Funktionsgleichung der Wendetangente.

### 4. Wendepunkt einer Funktionenschar

Bestimme aus der Zeichnung genau oder angenähert die ermittelbaren Koordinaten für Wendepunkte für die Funktion  $f(x)$  an, wenn der rechts abgebildete Graph

- der Funktionsgraph  $G_f$  selbst ist.
- der Graph der Ableitungsfunktion  $f'(x)$  ist.
- der Graph der zweiten Ableitungsfunktion  $f''(x)$  ist.



## Aufgaben zum Grundwissen Mathematik 12. Jahrgangstufe – Teil 8

- Diese Aufgaben zeigen, welche grundlegenden Fertigkeiten die Schülerinnen und Schüler in diesem Lehrplanabschnitt erlernen müssen. Diese Aufgaben sollten die Schülerinnen und Schüler also sicher lösen können. Da viele Abituraufgaben komplexer sind und einzelne Aufgabentypen vernetzen, garantiert das Beherrschen dieser Aufgaben jedoch noch keine gute oder sehr gute Abiturnote.
- Lehrplan: M 12.4 Anwendungen der Differential- und Integralrechnung
- Passende Kapitel im Schulbuch Fokus Mathematik 12: 7.1 und 7.2

### 1. Wachstums- und Zerfallsprozesse

Ordne den folgenden Prozessen jeweils einen Funktionsterm zu, durch den der Prozess beschrieben werden kann. Skizziere einen möglichen Funktionsgraphen und erkläre, was die Parameter bewirken.

a)	Radioaktiver Zerfall
b)	Exponentielle Abnahme (als Hüllkurve) beim Schwingkreis
c)	Abkühlung einer heißen Flüssigkeit
d)	Exponentielles (unbeschränktes) Wachstum bei Geldverzinsung
e)	Aufheizen eines Backofens

I)	$f(x) = a \cdot e^{-b \cdot x} + c$
II)	$f(x) = g(x) \cdot e^{-b \cdot x}$
III)	$f(x) = a(1 - e^{-b \cdot x})$
IV)	$f(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$
V)	$f(x) = a \cdot e^{-b \cdot x}$

### 2. Funktionsterme finden

Skizziere den Graphen  $G_f$  einer Funktion  $f$  mit den angegebenen Eigenschaften und finde einen möglichen Funktionsterm.

- I)  $f(2) = 0$
- II)  $f'(3) = 0$
- III)  $f(3) = 1$
- IV)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

### 3. Geometrische Optimierung

Aus einem 30cm breiten Brett als Boden und zwei 10cm breiten Brettern als Seitenwände soll der Wasserzufluss für ein Mühlrad gebaut werden. Wie groß ist der Winkel  $\varphi$  zu wählen, damit ein möglichst großer Wasserstrom auf das Mühlrad fließt? Wie groß ist dann die Querschnittsfläche der Rinne?



### 4. Kurvendiskussion zusammengesetzter Funktionen

Gegeben sei die Funktion  $f_a(x) = (x - a) \cdot e^{-x}$  mit  $a \in \mathbb{R}$ .

- a) Zeige, dass  $f_a$  genau eine Wendestelle besitzt.
- b) Bestimme das Verhalten von  $f_a$  an den Rändern des Definitionsbereichs.