Übungsaufgaben zum Grundwissen Oberstufe Stochastik

Diese Aufgaben zeigen, welche grundlegenden Fertigkeiten die Schülerinnen und Schüler in diesem Lehrplanabschnitt erlernen müssen. Diese Aufgaben sollten die Schülerinnen und Schüler also sicher lösen können. Da viele Abituraufgaben komplexer sind und einzelne Aufgabentypen vernetzen, garantiert das Beherrschen dieser Aufgaben jedoch noch keine gute oder sehr gute Abiturnote.

Aufgabe 1: Ereignisse, Mengendiagramme
Beschreibe die folgenden Ereignisse in Worten!
a) $A \cup B$
b) $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$
c) $\overline{A} \cap \overline{B}$
d) $\overline{A \cap B}$

Lösung:
a) A oder B treten ein.
b) Entweder A oder B tritt ein.
c) Weder A noch B tritt ein.
d) A und B treten nicht gleichzeitig ein.

Aufgabe 2: Unabängigkeit von Ereignissen
Ein Bauteil kann aus zwei verschiedenen Ursachen ausfallen: 1. Mangel: Defekt in der Mechanik, 2. Mangel: Defekt in der Elektrik
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauteil ausfällt, beträgt 0,077.
Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des ersten Mangels beträgt 0,06 die für das (gleichzeitige) Auftreten beider Mängel 0,032.
Untersuche, ob die beiden Mängel unabhängig voneinander auftreten!

Lösung:
gegeben:
$P(M1 \cup M2) = 0{,}077$
$P(M1) = 0{,}06$
$P(M1 \cap M2) = 0{,}032$
$P(M1 \cup M2) = P(M1) + P(M2) - P(M1 \cap M2)$
$0{,}077 = 0{,}06 + P(M2) - 0{,}032 \Rightarrow P(M2) = 0{,}049$
$P(M1) \cdot P(M2) = 0{,}06 \cdot 0{,}049 \neq 0{,}032 = P(M1 \cap M2)$, also abhängig

Aufgabe 3: Bernoulli

Ein Basketballer mit einer Freiwurfquote von 80% wirft zehnmal von der Freiwurflinie auf den Korb.
Eine Freiwurfquote von 80% bedeutet, dass er einen Freiwurf unabhängig von anderen Freiwürfen mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% trifft.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
A: Er trifft zehnmal.
B: Er trifft keinmal.
C: Er trifft mindestens einmal.
D: Er trifft nur beim vierten Wurf nicht.
E: Er trifft genau einmal.
F: Er trifft nur die den letzen vier Würfe.
G: Er trifft genau achtmal.

Lösung:
$P(A) = 0{,}8^{10}$
$P(B) = 0{,}2^{10}$
$P(C) = 1- 0{,}2^{10} = 1-P(B)$
$P(D) = 0{,}8^{3}\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^{6}$
$P(E) = 10\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^{9}$
$P(F) = 0{,}2^{6}\cdot 0{,}8^{4}$
$P(G) = \binom{8}{2} \cdot 0{,}2^{2}\cdot 0{,}2^{9}$

Aufgabe 4: Mindestens-Glücksrad
Wie oft muss man ein Glücksrad (Gewinnwahrscheinlichkeit: 25%) **mindestens** drehen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von **mindestens** 99% **mindestens** einmal gewinnt?

Lösung:
WICHTIG: Das Gegenereignis zu "mindestens einmal": keinmal
P(Niete) = 0,75
Wahrscheinlichkeit, n mal eine Niete zu "drehen": $0{,}75^{n}$
Wahrscheinlichkeit, bei n Versuchen mindestens einen Gewinn zu "drehen": $1 - 0{,}75^{n}$
Ansatz:
$1 - 0{,}75^{n} \geq 0{,}99$
$0{,}75^{n} \leq 0{,}01$
$\ln (0{,}75^{n}) \leq 0{,}01$
$n \cdot \ln (0{,}75) \leq 0{,}01$ (Vorzeichen!)

$n \geq \ln (0{,}01):\ln(0{,}75) = 16{,}007...$
$\Rightarrow$ mindestens 17 mal.

Aufgabe 5: Erwartungswert und Varianz im Urlaub

Die Zufallsgröße X beschreibt die Aufenthaltsdauer von Urlaubern in einem Ferienhotel.

Aufenthaltsdauer X in Tagen	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X)	0,05	0,10	0,17	0,23		0,12	0,08	0,09

a) Ergänze die Tabelle!

b) Wie groß ist die relative Häufigkeit für eine Aufenthaltsdauer von mehr als fünf Tagen?

c) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße X! Interpretiere diese Größen!

Lösung:

a)

Aufenthaltsdauer X in Tagen	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X)	0,05	0,10	0,17	0,23	0,16	0,12	0,08	0,09

b) 0,23 + 0,16 + 0,12 + 0,08 + 0,09 = 0,68 = 68%

c) E(X) = 6,48; Var (X) = 305896; σ(X) = 1,894...

Im Mittel bleiben Urlauber 6 bis 7 Tage im Hotel. Diese Aufenthaltsdauer streut sich durchschnittlich um ca. 2 Tage.

Aufgabe 6: Urnenmodelle

Unter 17 Kindern sollen vier Buchpreise verlost werden. Dabei können drei Fälle eintreten:

Fall 1: Es sind vier verschiedene Buchpreise; die Kinder können auch mehr als ein Buch gewinnen.

Fall 2: Es handelt sich um vier verschiedene Buchpreise; keines der Kinder darf mehr als ein Buch gewinnen.

Fall 3: Es handelt sich um vier gleiche Buchpreise; keines der Kinder darf mehr als ein Buch gewinnen.

a) Beschreibe für jeden Fall ein passendes Urnenverfahren, sodass jedes der Kinder die selbe Chance bei der Verlosung besitzt!

b) Bestimme (für alle drei Fälle) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmtes Kind genau einen Buchpreis gewinnt!

Lösung:

a) In der Urne befinden sich Zettel mit den Namen der 17 Kinder.

Fall 1: Für den ersten Buchpreis wird aus der Urne ein Zettel gezogen, dem zugehörigen Kind wird der Buchpreis übergeben. Anschließend wird der gezogene Zettel zurückgelegt und es werden auf gleiche Art und Weise die Gewinner der restlichen Bücher gezogen.

Fall 2: Wie Fall 1, nur dass gezogene Zettel nicht wieder zurückgelegt werden.

Fall 3: Aus der Urne werden gleichzeitig vier Zettel gezogen.

b) Fall 1: $4 \cdot \frac{1}{17} \cdot \left(\frac{16}{17}\right)^3$

Fall 2: $\frac{1}{17} + \frac{16}{17} \cdot \frac{1}{16} + \frac{16}{17} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{15} + \frac{16}{17} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{1}{14} = \frac{4}{17}$

Fall 3: $\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{16}{3}}{\binom{17}{4}} = \frac{4}{17}$

Aufgabe 7: Hypothesentest

In einem Wohngebiet ist bekannt, dass die Hälfte aller Haushalte Haustiere besitzen. Die Stadtverwaltung befragt 50 zufällig ausgewählte Haushalte.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzen weniger als 20 oder mehr als 30 der Haushalte Haustiere?

b) In einem anderen Wohngebiet besitzen 35 von 50 befragten Haushalten Haustiere. Interpretiere diese Feststellung (Anteil der Haustierbesitzer)!

Lösung:

a) $P(X<20 \text{ oder } X>30) = P(X \leq 19) + P(X \geq 31) = 0{,}11892$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 12% wird dies festgestellt.

b) Sollte für dieses Wohngebiet dieselbe Annahme gelten (Die Hälfte besitzt ein Haustier.), dann wäre bei 50 befragten Haushalten ein Erwartungswert von $n\cdot p = 50\cdot 0{,}5 = 25$ zu erwarten.

$P(X \geq 36) = 0{,}0033$

Es ist sehr unwahrscheinlich, dass die Annahme für dieses Wohngebiet stimmt, es wird vermutet, dass mehr als 50% der Haushalte ein Haustier besitzen.

Aufgabe 8: Bedingte Wahrscheinlichkeit

In einem Wandergebiet können zwei verschiedene Wanderwege (blau/gelb) zu einer Berghütte gewählt werden. Mit einer Statistik soll das Wanderverhalten untersucht werden. Eine Befragung ergibt, dass 43% der Wanderer weiblich sind, 23% sind männlich und benutzen den gelben Weg, 26% sind weiblich und nehmen den blauen Weg.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person auf dem blauen Weg weiblich?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit war, laut Statistik, ein zufällig ausgewählter Mann auf dem gelben Weg unterwegs?

Lösung:

Vierfeldertafel:

	W	M	
G	17%	23%	40%
B	26%	34%	60%
	43%	57%	100%

a) $P_B(W) = \frac{P(B \cap W)}{P(B)} = \frac{26}{60}$

b) $P_M(G) = \frac{P(M \cap G)}{P(M)} = \frac{23}{57}$